放物形偏微分方程式の逆問題に対する厳密解*

中村　真一**

Exact solution to an inverse problem for the parabolic partial differential equation

Shin-ichi Nakamura

1．序論

領域 $D_T = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ において，次の放物形偏微分方程式の混合問題を考える。

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) + q(t)u(x, t) \quad \text{in } D_T , \tag{1.1}$$

$$u(x, 0) = f(x) , \quad x \in [0, 1] , \tag{1.2}$$

$$u_x(0, t) = 0 , \ u_x(1, t) = 0 , \ t \in [0, T] , \tag{1.3}$$

ここで，$f(x)$ と $q(t)$ は次の条件を満足するものと仮定する。

(1) $f(x) \in C^1(0, 1), f(x) > 0 \quad \text{on } [0, 1]$，(1.4)

(2) $f'(0) = f'(1) = 0$ ，(1.5)

(3) $q(t) \in C^0(0, T) \cap L^\infty(0, T)$ and

$$q(t) \le 0 \quad \text{on } [0, T] , \tag{1.6}$$

このとき，問題（1.1），(1.2)，(1.3）に対する一意的な解 $u(x, t) \in L^2(0, T : H^2(0, 1))$ が存在し，さらに条件（1.4)，(1.6）と放物形方程式に対する最大値原理から $u(x, t) > 0$ on $\overline{D_T}$ が従う（cf.［6]）。

この研究報告で考えたい逆問題とは，観測データ $\theta(t) \equiv u(\bar{x}, t), 0 < \bar{x} < 1, t \in [0, T]$ から $q(t)$ を決定する問題である。様々な逆問題が研究されているが（cf.［1]，［2]，［3]，etc.），逆問題は一般的に非線形であるので，観測データから決定したい対象（今の場合は $q(t)$）を厳密に求めることは非常に難しく，また観測データから決定したい対象への安定性を欠く場合も数多く存在することが知られている（cf.［3]，［5]，etc.）。

ここで証明したいことは，我々が考えようとしている $\theta(t), t \in [0,T]$ から $q(t)$ を決定する逆問題は厳密解を持つことである。証明のアイデアは $u(x, t)$ にある変換を施すことによって逆問題を厳密に解くことができる形にするところにある。

2．逆問題の厳密解

序論で述べたように，問題（1.1)，(1.2)，(1.3）に対する一意的な解 u は $u(x, t) > 0$ on $\overline{D_T}$ を満足するので，$\log u$ を考えることができる。$v = -\log u$ とすると v は次を満たす。

$$v_t = v_{xx} - (v_x)^2 - q(t) \quad \text{in } D_T , \tag{2.1}$$

$$v(x,0) = -\log f(x) , \quad x \in [0, 1] , \tag{2.2}$$

$$v_x(0, t) = 0 , \ v_x(1, t) = 0 , \ t \in [0, T] , \tag{2.3}$$

さらに $w = v_x$ と変換すると w は次を満たす。

$$w_t = w_{xx} - 2ww_x \quad \text{in } D_T , \tag{2.4}$$

$$w(x, 0) = -\frac{f'(x)}{f(x)} , \quad x \in [0, 1] , \tag{2.5}$$

$$w(0, t) = 0 , \ w(1, t) = 0 , \ t \in [0, T] , \tag{2.6}$$

$q(t)$ を書き下すために，(2.1）を用いる。(2.1）と $v = -\log u$ かつ $w = v_x$ なので

---

* 原稿受付　平成 17 年 8 月 31 日

** 佐世保工業高等専門学校　一般科目（数学）

$$q(t) = v_{xx}(\bar{x}, t) - (v_x(\bar{x}, t))^2 - v_t(\bar{x}, t)$$
$$= w_x(\bar{x}, t) - (w(\bar{x}, t))^2 + \frac{u_t(\bar{x}, t)}{u(\bar{x}, t)}$$

を得る。

混合問題 (2.4), (2.5), (2.6) は Burgers 方程式の混合問題で，解は一意的に存在することが分かり (cf. [4]), また解 w は Cole-Hopf 変換によって，$w = -\dfrac{z_x(x, t)}{z(x, t)}$ と表示することができる。ここで，$z(x, t)$ は次の混合問題の一意解である

$$z_t = z_{xx} \text{ in } D_T ,$$
$$z(x, 0) = f(x) , \quad x \in [0, 1],$$
$$z_x(0, t) = 0 , \quad z_x(1, t) = 0 , \quad t \in [0, T]。$$

以上から

$$q(t) = w_x(\bar{x}, t) - (w(\bar{x}, t))^2 + \frac{u_t(\bar{x}, t)}{u(\bar{x}, t)}$$
$$= \frac{(z_x(\bar{x}, t))^2 - z(\bar{x}, t) z_{xx}(\bar{x}, t)}{(z(\bar{x}, t))^2} - \left(\frac{z_x(\bar{x}, t)}{z(\bar{x}, t)}\right)^2 + \frac{\theta'(t)}{\theta(t)}$$

を得る。

さらに Fourier 解析の結果を用いれば $z(x, t)$ は次のように具体的に固有関数展開されることが分かる

$$z(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(n\pi)^2 t} \left(\int_0^1 f(y)\sqrt{2} \cos n\pi y \, dy\right) \sqrt{2} \cos n\pi x$$

。

今までの考察をまとめると次の結果を得ることができる。

３．結果

混合問題 (1.1)〜(1.6) に対する $\theta(t) \equiv u(\bar{x}, t),\ 0 < \bar{x} < 1,\ t \in [0, T]$ から $q(t)$ を決定する逆問題は厳密解を持ち，次のように表示される

$$q(t) = \frac{(z_x(\bar{x}, t))^2 - z(\bar{x}, t) z_{xx}(\bar{x}, t)}{(z(\bar{x}, t))^2} - \left(\frac{z_x(\bar{x}, t)}{z(\bar{x}, t)}\right)^2 + \frac{\theta'(t)}{\theta(t)}$$

ここで，$z(x, t)$ は次の混合問題の具体的な固有関数展開を持つ一意解である

$$z_t = z_{xx} \text{ in } D_T ,$$
$$z(x, 0) = f(x) , \quad x \in [0, 1],$$
$$z_x(0, t) = 0 , \quad z_x(1, t) = 0 , \quad t \in [0, T]。$$

参考文献

[1] J. R. Cannon, Y. Lin, S. Wang, Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation, J. Austral. Math. Soc. Ser. B 33(1991), 149-163.

[2] H. W. Engl and W. Rundell, ed., Inverse problems in diffusion processes, S.I.A.M., 1995.

[3] V. Isakov, Inverse Problems for Partial Differential Equations, Springer-Verlag, 2005.

[4] H. O. Kreiss and J. Lorenz, Initial-boundary value problems and the Navier-Stokes equations, Academic Press, 1989.

[5] Z. Li and K. Zeng, An inverse problem in a parabolic equation, Electron. Jour. Differ. Equ. Conf 01(1997), 203-209.

[6] F. Treves, Basic Linear Partial Differential Equations, Academic Press, 1975.