パスカルの三角形を利用した $(a+b+c)^n$ の簡単な展開方法*

稲永善数**

On the most simple expansion of $(a+b+c)^n$ by using Pascal's triangle

Yoshikazu Inenaga

1. はじめに

$(a+b)^n$ の展開式を考えると、$a^{n-r}b^r$ における項の係数は、n 個の因数 $(a+b)$ から r 個の b を取り出す取り出し方で表される。すなわち、その係数は

${}_nC_r$ または ${}_nC_{n-r}$

である。

また、三項の展開式 $(a+b+c)^n=\{a+(b+c)\}^n$ より、因数 a を p 個もつ項は

${}_nC_pa^p(b+c)^{n-p}$, 次に、$(b+c)^{n-p}$ の展開において、因数 b を q 個持つ項は、${}_{n-p}C_qb^q$ となる。よって、$a^pb^qc^r$ の係数は

${}_nC_p\cdot{}_{n-p}C_r$ または ${}_nC_{n-p}\cdot{}_pC_r$

とかける。

さて、$(a+b)^n$ の展開式で $a^{n-r}b^r$ の係数は ${}_nC_r$ で求められた。この値は ${}_nC_r$ は、パスカルの三角形を用いれば容易に求められることが知られている。同じように、$(a+b+c)^n$ の展開式、すなわち　$a^pb^qc^r$ の係数も同様に、２項間のパスカルの三角形のように求められないかというのが本論の目的である。

２項間のパスカルの三角形から３項間でもパスカルの三角形のような方法で展開式を求められないかという発想はあった。三角形の辺上で各頂点の和を求めていく方法は、村上一三 [1] が与えている。しかしこれは簡単なようでかなりのテクニックを要する。

2. $(a+b+c)^{14}$ の abc の項を含む展開式とその係数

まず、$(abc)^m$(　　＊　　) の形の展開式と係数を考える。

展開の項	係数
$(abc)(a^{11}+b^{11}+c^{11})$	…… ${}_{14}C_{12}\cdot{}_2C_1$
$(abc)(a^{10}b+ab^{10}+b^{10}c+bc^{10}+c^{10}a+ca^{10})$	…… ${}_{14}C_{11}\cdot{}_3C_1$
$(abc)(a^9b^2+a^2b^9+b^9c^2+b^2c^9+c^9a^2+c^2a^9)$	…… ${}_{14}C_{10}\cdot{}_4C_1$
$(abc)(a^8b^3+a^3b^8+b^8c^3+b^3c^8+c^8a^3+c^3a^8)$	…… ${}_{14}C_9\cdot{}_5C_1$
$(abc)(a^7b^4+a^4b^7+b^7c^4+b^4c^7+c^7a^4+c^4a^7)$	…… ${}_{14}C_8\cdot{}_6C_1$
$(abc)(a^6b^5+a^5b^6+b^5c^6+b^6c^5+c^5a^6+c^6a^5)$	…… ${}_{14}C_7\cdot{}_7C_1$
$(abc)^2(a^8+b^8+c^8)$	…… ${}_{14}C_{10}\cdot{}_4C_2$
$(abc)^2(a^7b+ab^7+b^7c+bc^7+c^7a+ca^7)$	…… ${}_{14}C_9\cdot{}_5C_2$
$(abc)^2(a^6b^2+a^2b^6+b^6c^2+b^2c^6+c^6a^2+c^2a^6)$	…… ${}_{14}C_8\cdot{}_6C_2$

* 原稿受付　平成18年８月28日
**佐世保工業高等専門学校　一般科目

$(abc)^2(a^5b^3+a^3b^5+b^5c^3+b^3c^5+c^5a^3+c^3a^5)$ …… ${}_{14}C_7 \cdot {}_7 C_2$

$(abc)^2(a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4)$ …… ${}_{14}C_6 \cdot {}_8 C_2$

$(abc)^3(a^5+b^5+c^5)$ …… ${}_{14}C_8 \cdot {}_6 C_3$

$(abc)^3(a^4b+ab^4+b^4c+bc^4+c^4a+ca^4)$ …… ${}_{14}C_7 \cdot {}_7 C_3$

$(abc)^3(a^3b^2+a^2b^3+b^3c^2+b^2c^3+c^3a^2+c^2a^3)$ …… ${}_{14}C_6 \cdot {}_8 C_3$

$(abc)^4(a^2+b^2+c^2)$ …… ${}_{14}C_6 \cdot {}_8 C_4$

$(abc)^4(ab+bc+ca)$ …… ${}_{14}C_5 \cdot {}_9 C_4$

この係数を以下のように並べる。

	0列	1列	2列	3列	4列	5列	6列	7列	8列	9列
0段	${}_{14}C_0$	${}_{14}C_1$	${}_{14}C_2$	${}_{14}C_3$	${}_{14}C_4$	${}_{14}C_5$	${}_{14}C_6$	${}_{14}C_7$	${}_{14}C_8$	${}_{14}C_9$
1段			${}_2C_1$	${}_3C_1$	${}_4C_1$	${}_5C_1$	${}_6C_1$	${}_7C_1$	${}_8C_1$	${}_9C_1$
2段					${}_4C_2$	${}_5C_2$	${}_6C_2$	${}_7C_2$	${}_8C_2$	${}_9C_2$
3段							${}_6C_3$	${}_7C_3$	${}_8C_3$	${}_9C_3$
4段									${}_8C_4$	${}_9C_4$

さらに、上の表の１段以降を数値に直すと以下のようになる。

	0列	1列	2列	3列	4列	5列	6列	7列	8列	9列
0段	${}_{14}C_0$	${}_{14}C_1$	${}_{14}C_2$	${}_{14}C_3$	${}_{14}C_4$	${}_{14}C_5$	${}_{14}C_6$	${}_{14}C_7$	${}_{14}C_8$	${}_{14}C_9$
1段			2	3	4	5	6	7	8	9
2段					6	10	15	21	28	36
3段							20	35	56	84
4段									70	126

3. $(a+b+c)^{14}$ のうち $(abc)^m(\quad * \quad)$ の形の係数を具体的に求める方法

(1) $(abc)^3(a^4b+ab^4+bc^4+b^4c+c^4a+ca^4)$ の係数は

$${}_{14}C_7 \cdot {}_7 C_3$$

である。これは、表より０段７行目の ${}_{14}C_7$ と７行目の３段 ${}_7C_3$ を掛けた形となっている。

(2) $(abc)(a^6b^5+a^5b^6+b^5c^6+b^6c^5+c^5a^6+c^6a^5)$ の係数は、${}_{14}C_7 \cdot {}_7 C_1$ である。

表より、0段7列目の ${}_{14}C_7$ と、7列目の1段 ${}_7C_1$ を掛けた形となっている。
また、上の表から

$$2 \times {}_3C_1 = {}_4C_2,\ {}_5C_1 + {}_5C_2 = {}_6C_2$$

$$2 \times {}_5C_2 = {}_6C_3,\ {}_7C_2 + {}_7C_3 = {}_8C_3$$

$$2 \times {}_7C_3 = {}_8C_4,\ \cdots\cdots$$

このことから、m $(m = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 段の初項 ${}_{2m}C_m$　m 段の s 番目は ${}_{2m+s-1}C_m$ より、前述した関係を確かめると次のようになる。

$${}_{2m+s-1}C_m = {}_{2m+s-2}C_{m-1} + {}_{2m+s-2}C_m$$

特に、m 段の最初の項、すなわち $s = 1$ のとき

$$2 \times {}_{2m-1}C_{m-1} = {}_{2m}C_m$$

以上のことから、$(a+b+c)^{14}$ の係数に関する表を作成する。

$$\begin{tikzcd}
\text{0段} & {}_{14}C_0 & {}_{14}C_1 & {}_{14}C_2 & {}_{14}C_3 & {}_{14}C_4 & {}_{14}C_5 & {}_{14}C_6 & {}_{14}C_7 & {}_{14}C_8 \\
\text{1段} & & & 2 \arrow[r, dash] & 3 \arrow[r, dash] \arrow[dr, "3\times2"'] & 4 \arrow[r, dash] \arrow[d] & 5 \arrow[r, dash] \arrow[d] & 6 \arrow[r, dash] \arrow[d] & 7 \arrow[r, dash] \arrow[d] & 8 \arrow[d, dash] \\
\text{2段} & & & & & 6 \arrow[r, "4+6"] & 10 \arrow[r, "5+10"] \arrow[dr, "10\times2"'] & 15 \arrow[r, "6+15"] \arrow[d] & 21 \arrow[r, "7+21"] \arrow[d] & 28 \arrow[d, dash] \\
\text{3段} & & & & & & & 20 \arrow[r, dash, "15+20"] & 35 \arrow[r, "21+35"] \arrow[dr, "35\times2"'] & 56 \arrow[d, dash] \\
\text{4段} & & & & & & & & & 70
\end{tikzcd}$$

4.　$(a+b+c)^n$ の展開で、abc を含む係数の規則性の一般化

$(a+b+c)^n$ の展開式において
$a^pb^qc^{n-p-q}$ の係数は、組合せの考え方から

$${}_nC_p \cdot {}_{n-p}C_{n-p-q} = \frac{n!}{p!q!(n-p-q)!}$$

（ただし、$n-p-q \geqq 0$,　$m,\ p,\ q = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$）
$(a+b+c)^n$ の展開の各項は、以下のように書くことができる。

$$(abc)^m(a^{n-3m-t}b^t + a^tb^{n-3m-t} + b^{n-3m-t}c^t + b^tc^{n-3m-t} + c^{n-3m-t}a^t + c^ta^{n-3m-t})$$

（ただし、$m,\ t = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots;$
$n-3m-t \geqq 0$）

ここで、上式の第1項

$$(abc)^ma^{n-3m-t}b^t = a^{n-2m-t}b^{t+m}c^m$$

に着目すると、

その係数は

$${}_nC_{n-2m-t} \cdot {}_{2m+t}C_m \qquad \cdots\cdots ①$$

上の ${}_nC_{n-2m-t} \cdot {}_{2m+t}C_m$ の ${}_nC_{n-2m-t}$ を第1項、${}_{2m+t}C_m$ を第2項と呼ぶことにする。
ここで、$t = s-1$ とおく。（ただし、s は、m 段目の s 番目、$s = 1,\ 2,\ 3\cdots$
s を用いて表すと、その係数①は

$${}_nC_{2m+s-1} \cdot {}_{n-(2m+s-1)}C_{n-p-m}$$

と書け、

$$a^pb^qc^{n-p-q}$$

の係数と一致する。

すなわち、$p = 2m+s-1,\ r = m$ の場合である。

さらに、m 段目の s 番目の係数 ${}_sC_m$ $(m,\ s=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ の個数を l_m とおくと

$$l_m=[\frac{n-3m}{2}]+1$$

と表すことができる。

ただし、[　] はガウス記号を表す。

$(n-3m \geqq 0,\ s,\ m,\ n=1,\ 2,\ 3\ ,\cdots\cdots)$

なぜなら、$(a+b+c)^n$ の展開式で

$(abc)^m(a^{n-3m-t}b^t+a^tb^{n-3m-t}+b^{n-3m-t}c^t+b^tc^{n-3m-t}+c^{n-3m-t}a^t+c^ta^{n-3m-t})$

の第１項に着目をする。$t=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$

$(abc)^m a^{n-3m-t}b^t=a^{n-3m-t}\cdot b^t$ の a, b の次数に着目

$n-3m-t \geqq t$ だけ、$a^{n-3m-t}b^t$ が表れる。

これより

$$t \leqq \frac{n-3m}{2}$$

これは、t の最大値が、$\dfrac{n-3m}{2}$ の整数値を超えないことを示している。その個数を l_m とすると、$t=l_m-1$　$(l_m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

であるから、

$$l_m=[\frac{n-3m}{2}]+1$$

だけ、${}_sC_m$ が表れる。

第１項 ${}_nC_{n-2m-t}={}_nC_{2m+t}$ であるから、$m=0$ とおき、$t=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ とおくと、

$(abc)^0($　$*$　$)$

の形の係数は、次のようになる。

${}_nC_n$　${}_nC_{n-1}$,　$\cdots\cdots$,　${}_nC_2$　${}_nC_0$

すなわち

0段　　${}_nC_0$　${}_nC_1$,　$\cdots\cdots$,　${}_nC_{n-1}$　${}_nC_n$

このm $=0$ の行は、$(a+b)^n$ の展開での、パスカルの三角形に表れる係数である。

次に第２項；${}_{2m+t}C_m$

$(t=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ;\ t \leqq m)$

$t=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$ とおくと、以下の数列が得られる。

$m=1$ のとき　$\{{}_{2+t}C_1\}$

$\{{}_2C_1,\ {}_3C_1,\ {}_4C_1,\ \cdots\cdots\}$

$m=2$ のとき　$\{{}_{4+t}C_1\}$

$\{{}_4C_2,\ {}_5C_2,\ {}_6C_2,\ \cdots\cdots\}$

$m=3$ のとき　$\{{}_{6+t}C_1\}$

$\{{}_6C_3,\ {}_7C_3,\ {}_8C_3,\ \cdots\cdots\}$

$m=0$ を 0 段、$m=1$ を 1 段、$m=k$ を k 段、${}_{2m+t}C_m$ の $2m+t$ を列として、表を作成すると次のようになる。

$$
\begin{tikzcd}
0\text{段} & {}_nC_0 & {}_nC_1 & {}_nC_2 \arrow[d] & {}_nC_3 \arrow[d] & {}_nC_4 \arrow[d] & {}_nC_5 \arrow[d] & {}_nC_6 \arrow[d] & {}_nC_7 \arrow[d] & {}_nC_8 \arrow[d] & {}_nC_9 \arrow[d] \\
1\text{段} & & & {}_2C_1 \arrow[r] & {}_3C_1 \arrow[r] \arrow[dr, "2\times{}_3C_1"'] & {}_4C_1 \arrow[r] \arrow[d] & {}_5C_1 \arrow[r] \arrow[d] & {}_6C_1 \arrow[r] \arrow[d] & {}_7C_1 \arrow[r] \arrow[d] & {}_8C_1 \arrow[r] \arrow[d] & {}_9C_1 \arrow[d] \\
2\text{段} & & & & & {}_4C_2 \arrow[r] & {}_5C_2 \arrow[r] \arrow[dr, "2\times{}_5C_2"'] & {}_6C_2 \arrow[r] \arrow[d] & {}_7C_2 \arrow[r] \arrow[d] & {}_8C_2 \arrow[r] \arrow[d] & {}_9C_2 \arrow[d] \\
3\text{段} & & & & & & & {}_6C_3 \arrow[r] & {}_7C_3 \arrow[r] \arrow[dr, "2\times{}_7C_3"'] & {}_8C_3 \arrow[r] \arrow[d] & {}_9C_3 \arrow[d] \\
4\text{段} & & & & & & & & & {}_8C_4 \arrow[r] & {}_9C_4
\end{tikzcd}
$$

上記の表を数値で表すと次のようになる。

$$
\begin{tikzcd}
0\text{段} & {}_nC_0 & {}_nC_1 & {}_nC_2 \arrow[d, dash] & {}_nC_3 \arrow[d, dash] & {}_nC_4 \arrow[d, dash] & {}_nC_5 \arrow[d, dash] & {}_nC_6 \arrow[d, dash] & {}_nC_7 \arrow[d, dash] & {}_nC_8 \arrow[d, dash] \\
1\text{段} & & & 2 \arrow[r, dash] & 3 \arrow[r, dash] \arrow[dr, "3\times2"'] & 4 \arrow[r, dash] \arrow[d] & 5 \arrow[r, dash] \arrow[d] & 6 \arrow[r, dash] \arrow[d] & 7 \arrow[r, dash] \arrow[d] & 8 \arrow[d] \\
2\text{段} & & & & & 6 \arrow[r, "4+6"] & 10 \arrow[r, "5+10"] \arrow[dr, "10\times2"'] & 15 \arrow[r, "6+15"] \arrow[d] & 21 \arrow[r, "7+21"] \arrow[d] & 28 \arrow[d] \\
3\text{段} & & & & & & & 20 \arrow[r, "15+20"] & 35 \arrow[r, "21+35"] \arrow[dr, "35\times2"'] & 56 \arrow[d] \\
4\text{段} & & & & & & & & & 70
\end{tikzcd}
$$

展開式の係数　　　${}_nC_{n-2m-t}\cdot{}_{n-(n-2m-t)}C_m={}_nC_{n-2m-t}\cdot{}_{2m+t}C_m$

は、0 段、すなわち、2 項のパスカルの三角形の係数 (0 段目の数) と、同列の数との積によって与えられることがわかる。

5. 表から $(a+b+c)^9$ の展開式を求める

パスカルの三角形より

1									
1	1								
1	2	1							
1	3	3	1						
1	4	6	4	1					
1	5	10	10	5	1				
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		
1	8	28	56	70	56	28	8	1	
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

この最後の段を０段目とする。

０段　1　9　36　84　126　126　84　36　9　1

……　$(abc)^0($　$*$　$)$ の形の係数があらわれる。

すなわち、それぞれ、 $9(a^9+b^9+c^9)$, $36(a^8b+ab^8+b^8c+bc^8+c^8a+ca^8)$, $84(a^7b^2+a^2b^7+b^7c^2+b^2c^7+c^7a^2+c^2a^7)$, $126(a^6b^3+a^3b^6+b^6c^3+b^3c^6+c^6a^3+c^3a^6)$, $126(a^5b^4+a^4b^5+b^5c^4+b^4c^5+c^5a^4+c^4a^5)$ が与えられる。

０段目は、２項間のパスカルの三角形から求めた数値である。

２段目以降は、決まった数値であり、上記の段から２項ずつ空けて数値を記入すると以下の数値表ができる。

０段	1	9	36	84	126	126	84 …	$(abc)^0(*)$
１段			2	3	4	5	6 …	$(abc)(*)$
２段					6	10	15 …	$(abc)^2(*)$
３段							20 …	$(abc)^3(*)$

０段の部分と２段以降部分の分を組み合わせる。同じ列の部分の数値を掛ける。

(1)　0段目

$$a^9+b^9+c^9$$
$$(a^8b+ab^8+b^8c+bc^8+c^8a+ca^8)$$
$$(a^7b^2+a^2b^7+b^7c^2+b^2c^7+c^7a^2+c^2a^7)$$
$$(a^6b^3+a^3b^6+b^6c^3+b^3c^6+c^6a^3+c^3a^6)$$
$$(a^5b^4+a^4b^5+b^5c^4+b^4c^5+c^5a^4+c^4a^5)$$

の係数を考える。2項定理のように、3項定理の次数は9であるから、上記のように a, b, c の組み合わせは同次なものを順次記述すればよい。その係数は、それぞれ0段目を書けばよい。

(2)　次に、$(abc)(\quad * \quad)$ の形、すなわち

$$(abc)(a^6+b^6+c^6)$$
$$(abc)(a^5b+ab^5+b^5c+bc^5+c^5a+ca^5)$$
$$(abc)(a^4b^2+a^2b^4+b^4c^2+b^2c^4+c^4a^2+c^2a^4)$$
$$(abc)(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)$$

において、$(abc)(a^6+b^6+c^6)$
係数は、1段目の数字2と0段目の同じ列にある36との積 2×36、$(abc)(a^5b+ab^5+b^5c+bc^5+c^5a+ca^5)$ の係数は、1段目の数字3と0段目の同じ列にある84との積となる。
これを、$l_1=[\dfrac{n-3m}{2}]+1=\dfrac{9-3\times1}{2}+1=4$ まで順次行う。

実際は、$(abc)(a^6+\cdots\cdots)$, $(abc)(a^5b+\cdots\cdots)$, $(abc)(a^4b^2+\cdots\cdots)$, $(abc)(a^3b^3+\cdots\cdots)$ のように最初の項 a の次数が b と等しくなるまで続ければよい。それぞれ、その係数は、同列の掛け算 2×36, 3×84, 4×126, 5×126 を得る。

(3)　次に、$(abc)^2(\quad * \quad)$ の形、すなわち

$$(abc)^2(a^3+b^3+c^3)$$
$$(abc)^2(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)$$

において、$(abc)^2(a^3+b^3+c^3)$
係数は、2段目の数字6と0段目の同じ列にある126との積 6×126、$(abc)^2(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2)$ の係数は2段目の数字10と0段目の同じ列にある126との積となる。
これを、$l_2=[\dfrac{n-3m}{2}]+1=\dfrac{9-3\times2}{2}+1=2$ まで順次行う。

実際は、$(abc)(a^3+\cdots\cdots)$, $(abc)(a^2b+\cdots\cdots)$, のように、最初の項 a の次数と b の次数を見ながら判断すればよい。

(4)　次に、$(abc)^3(\quad * \quad)$ の形、すなわち

$$(abc)^3$$

の係数は、
3段目の数字20と0段目の同じ列にある84との積 20×84 となる。
また、$l_3=[\dfrac{n-3m}{2}]+1=\dfrac{9-3\times3}{2}+1=1$

であるから確かに、1個だけである。
以上のことから、展開式を求めることができる。
$(a+b+c)^n$ の展開における係数の求め方に関して、この方法は2段目以降は、どのような自然数 n に対しても同じ表で表せ、2段目が2, 3, 4, ……であるから、3段目以降は、2列だけ空けて2倍、次の項は L 型に加えればその表が出来上がる。
0段目は、2項間のパスカルの三角形であり、この2つの数字を掛け合わせるだけで、係数を求めることができるという簡便さがある。
$(a+b+c+d)^n$ も同様に、簡単な表を与えることによって係数を求めることができないだろうか。結論を言えばこれも可能である。3項間の場合と異なり、表を3つ用いることになりかなり複雑さが伴う。数学は問題を解決するためには1通りの方法があるわけではない。その意味でもっと簡単な方法があるはずである。

$(a+b+c)^9 = a^9 + b^9 + c^9$

$+\mathbf{9}\ (a^8b + ab^8 + b^8c + bc^8 + c^8a + ca^8)$

$+\mathbf{36}\ (a^7b^2 + a^2b^7 + b^7c^2 + b^2c^7 + c^7a^2 + c^2a^7)$

$+\mathbf{84}\ (a^6b^3 + a^3b^6 + b^6c^3 + b^3c^6 + c^6a^3 + c^3a^6)$

$+\mathbf{126}\ (a^5b^4 + a^4b^5 + b^5c^4 + b^4c^5 + c^5a^4 + c^4a^5)$

$+\mathbf{2} \times \mathbf{36}\ (abc)(a^6 + b^6 + c^6)$

$+\mathbf{3} \times \mathbf{84}\ (abc)(a^5b + ab^5 + b^5c + bc^5 + c^5a + ca^5)$

$+\mathbf{4} \times \mathbf{126}\ (abc)(a^4b^2 + a^2b^4 + b^4c^2 + b^2c^4 + c^4a^2 + c^2a^4)$

$+\mathbf{5} \times \mathbf{126}\ (abc)(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3)$

$+\mathbf{6} \times \mathbf{126}\ (abc)^2(a^3 + b^3 + c^3)$

$+\mathbf{10} \times \mathbf{126}\ (abc)^2(a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2)$

$+\mathbf{20} \times \mathbf{84}\ (abc)^3$

で与えられる。

参考文献

[1] 村上一三；パスカルの三角形に一般化とその教材化. 日本数学教育学会誌. 第 71 巻第 1 号 (1989),40-46

[2] ポリア、柴垣和三雄;帰納と類比、丸善、(1959)