

# 確率楕円型偏微分方程式に対する境界値逆問題\*

中村 真一\*\*

An inverse boundary value problem for the stochastic elliptic partial differential equation

Shin-ichi NAKAMURA

## 1. 序論

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  を確率空間,  $a > 0$  は定数として, 領域  $D = \{(x, y) : 0 < x < 1, 0 < y < \pi/a\}$  において, 次の確率楕円型偏微分方程式に対する境界値問題を考える。

$$\begin{aligned} & \partial_x(\gamma(x)\partial_x u(x, y, \omega)) + \gamma(x)\partial_y^2 u(x, y, \omega) \\ &= \varepsilon \frac{dW(x, \omega)}{dx} \otimes \sin(ay) \\ & \quad \text{in } D \times \Omega, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$u(x, 0, \omega) = u(x, \pi/a, \omega) = 0, \quad (1.2)$$

$$u(0, y, \omega) = u(1, y, \omega) = \sin(ay), \quad (1.3)$$

ここで,  $dW(x, \omega)/dx$  は白色雑音,  $\varepsilon > 0$  は雑音の大きさを表すパラメータとし, 以下確率論の慣習に従い  $u(x, y, \omega) = u(x, y)$  のように  $\omega$  を省略する。境界値問題 (1.1), (1.2), (1.3) は  $\varepsilon = 0$  のとき,  $y$  方向に等方的な決定論的楕円型偏微分方程式の境界値問題となり,  $\varepsilon > 0$  の場合は雑音が加わった非決定論的な確率楕円型偏微分方程式の境界値問題となる。

この研究報告で考えたい逆問題とは,  $\varepsilon > 0$  の場合に観測データ  $k(x) \equiv \gamma(x)\partial_y u|_{y=0}$  から  $\gamma(x)$  を決定する問題である。  $\varepsilon = 0$  の場合は,  $k(x)$  から  $\gamma(x)$  が一意に決定できることが分かっているが (cf. [1], etc. ), 一般的にデータ等には雑音が含まれるので, 雑音がある場合に逆問題は解析的に解

くことが出来るのかどうか, さらに解くことが出来る場合にはどのような意味で解くことが出来るのか, これらの問題点を数理モデルを用いて明らかにすることは現実の問題に数理解析を応用する場合に役立つと思われる。

## 2. 境界値問題の解について

境界値問題 (1.1), (1.2), (1.3) の解を

$$u = v(x) \cdot \sin(ay) \equiv v(x, \omega) \cdot \sin(ay) \text{ なる形で探す。}$$

$u = v \cdot \sin(ay)$  を (1.1), (1.2), (1.3) に代入し整理すると  $v(x) \equiv v(x, \omega)$  に対する次の境界値問題をを得る。

$$\begin{aligned} & (\gamma(x)v'(x))' - a^2\gamma(x)v(x) = \varepsilon W' \\ & \quad \text{in } x \in (0, 1), \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$v(0) = v(1) = 1, \quad (2.2)$$

ここで,  $v'(x)$  等は  $x$  での微分を表す。境界値問題 (2.1), (2.2) の解  $v(x)$  がどのような条件の下で一意的に存在するかについて次の命題が成立する。

【命題 2.1】  $\gamma(x) \in C^1([0, 1])$  かつ  $\gamma(x) > 0$  であり,  $a > 0$  と  $\gamma(x)$  を  $\max_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{\gamma'(x)}{\gamma(x)} \right| + a^2 < \frac{1}{3}$  を満たすようにとる。このとき (2.1), (2.2) の解  $v(x)$  が  $C_{1,1}^1([0, 1])$  の中に一意に存在し, 強最大値原理から  $v(x) > 0$  となる。ただし,  $f(x) \in C_{1,1}^1([0, 1])$  とは  $f(x)$  が  $[0, 1]$  上の 1 階連続微分可能な関数でありかつ  $f(0) = f(1) = 1$  を満たす関数であることを意味する。

\* 原稿受付 平成 18 年 9 月 22 日

\*\* 佐世保工業高等専門学校 一般科目

【証明】論文 [2] の Proposition 1.4 の条件が満たされることを示せばよい。その条件とは (2.1) を次のように変形したとき、

$$v'' + \frac{\gamma'}{\gamma} v' - a^2 v = \varepsilon \frac{1}{\gamma} W',$$

$f(\xi, \eta) \equiv \frac{\gamma'(x)}{\gamma(x)} \xi - a^2 \eta$  とおくと、 $f(\xi, \eta)$  が 1 次ヘルダー連続で、ヘルダー定数を  $1/3$  未満に取ることが出来れば解が  $C_{1,1}^1([0, 1])$  の中に一意的に存在する

するというものである。ところが

$$|f(\xi, \eta) - f(\bar{\xi}, \bar{\eta})| \leq \left( \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{\gamma'(x)}{\gamma(x)} \right| + a^2 \right) (|\xi - \bar{\xi}| + |\eta - \bar{\eta}|)$$

であり、条件  $\max_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{\gamma'(x)}{\gamma(x)} \right| + a^2 < \frac{1}{3}$  を用いれば結局

$$|f(\xi, \eta) - f(\bar{\xi}, \bar{\eta})| < K (|\xi - \bar{\xi}| + |\eta - \bar{\eta}|), \quad K < \frac{1}{3}$$

を得るので、論文 [2] の Proposition 1.4 のヘルダー条件が満たされることになる。

以上命題 2.1 から境界値問題 (1.1), (1.2), (1.3) の解  $u(x, y, \omega)$  は  $u = v(x, \omega) \cdot \sin(ay)$  なる形で一意的に存在することがわかる。

### 3. 逆問題の解析

観測データ  $k(x) \equiv \gamma(x) \partial_y u|_{y=0}$  に

$u = v(x) \cdot \sin(ay)$  を代入して  $\gamma(x)$  について解けば

$$\gamma(x) = \frac{k(x)}{av(x)}$$

理すれば  $k(x)$  と  $v(x)$  に関する次の関係式を得る。

$$\left( k(x) \frac{v'(x)}{v(x)} \right)' - a^2 k(x) = \varepsilon a W'$$

この式を  $x$  で積分し  $v(0)=1$  と  $W(0, \omega)=0$  を用いれば

$$(\ln v(x))' = \frac{k(0)v'(0)}{k(x)} + \frac{a^2}{k(x)} \int_0^x k(s) ds + \frac{\varepsilon a}{k(x)} W(x)$$

を得る。さらにもう一度  $x$  で積分し  $v(0)=1$  を用いれば

$$\ln v(x) = k(0)v'(0) \int_0^x k^{-1}(s) ds \quad (3.1)$$

$$+ a^2 \int_0^x k^{-1}(s) \int_0^s k(t) dt + \varepsilon a \int_0^x k^{-1}(s) W(s) ds$$

を得る。ここで境界条件  $v(1)=1$  を用いれば

$$k(0)v'(0) = - \left( \int_0^1 k^{-1}(s) ds \right)^{-1} \times \left( a^2 \int_0^1 k^{-1}(s) \int_0^s k(t) dt + \varepsilon a \int_0^1 k^{-1}(s) W(s) ds \right) \quad (3.2)$$

であるから、(3.2) を (3.1) に代入すれば  $\ln v(x)$  すなわち  $v(x)$  を観測データ  $k(x)$  と雑音のみを用いて書き下せるということが分かり、さらに

$$\gamma(x) = \frac{k(x)}{av(x)}$$

なる関係式から  $\gamma(x)$  が  $k(x)$  と雑音を用いて表すことができることも分かる。

(3.1), (3.2) と白色雑音の数学的期待値の性質

$$E \left[ \int_0^x W(x, \omega) dx \right] = \int_0^x E[W(x, \omega)] dx = 0$$

を用いれば

$$E[\ln v(x)] = - \left( \int_0^1 k^{-1}(s) ds \right)^{-1} \times \left( a^2 \int_0^1 k^{-1}(s) \int_0^s k(t) dt \right) \int_0^x k^{-1}(s) ds + a^2 \int_0^x k^{-1}(s) \int_0^s k(t) dt$$

となり、この式を用いれば  $\varepsilon = 0$  の場合の境界値逆問題で  $\gamma(x)$  を観測データ  $k(x)$  のみを用いて再構成できることも従う。

参考文献

- [1] V. Isakov, Inverse Problems for Partial Differential Equations, Springer-Verlag, 2005.
- [2] D. Nualart and E. Pardoux, Second order stochastic differential equations with Dirichlet boundary conditions, Stochastic Processes and their Applications 39(1991), 1-24.