Smoluchowski 形方程式に対する逆問題*

中村　真一**

An inverse problem for the Smoluchowski type equation

Shin-ichi NAKAMURA

1．序論

$R^n\ (n \ge 2)$ において，次の放物形偏微分方程式の初期値問題を考える。

$$\partial_t u = \frac{1}{2}\Delta u + \nabla\gamma\cdot\nabla u \quad \text{in} \quad R^n \ , \tag{1.1}$$

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{in} \quad R^n \ , \tag{1.2}$$

ここで，$\gamma(x)$ は次の条件を満たすものとする。

$$\gamma \in C^2 \bigcap \text{supp}\ \gamma \subset\subset \{x : |x| < R,\ (R > 0)\}, \tag{1.3}$$

方程式（1.1）はポテンシャル γ の勾配による外力 $\nabla\gamma$ を受けながら拡散する現象を表す，いわゆる Smoluchowski 形方程式と呼ばれるものであり，（1.3）の supp γ に対する条件は外力による摂動がコンパクトな領域に限られることを意味している。

我々が考えたい逆問題とは $\{f(x)\}$（入力データ）と $\{u(R\omega,t) : \omega \in S^{n-1}\}$（観測データ）から γ を決定することである。

この研究報告で示したいことは，［2］において，我々が確率解析を用いて放物形偏微分方程式 $\partial_t w = \frac{1}{2}\Delta w + q(x)w$ の逆問題に対して得た結果が，γ がある条件を満たせば（1.1）の方程式に対しても適用できることである。

2．問題の変換と逆問題の解析

［2］で得られた結果が適用できるように（1.1），（1.2）を次のように変換する。

$u(x,t) = \exp(-\gamma(x))\cdot v(x,t)$ とすると，初期値問題（1.1），（1.2）は v に対する次の初期値問題となる。

$$\partial_t v = \frac{1}{2}\Delta v + q(x)v\ , \tag{1.4}$$

$$\text{ここで，}\ q(x) = -\frac{1}{2}\left(\Delta\gamma + |\nabla\gamma|^2\right)\ , \tag{1.5}$$

$$v(x,0) = \exp(\gamma(x))\cdot f(x)\ , \tag{1.6}$$

ここで，初期条件の $f(x)$ を $f(x) = \rho_\varepsilon(x - R\theta)$（$\rho_\varepsilon(x)$ は Friedrichs mollifier で，$\varepsilon > 0$ は十分小さいとする）に選べば，（1.3）の γ に対する supp の条件から（1.6）の初期値は

$$v(x,0) = \rho_\varepsilon(x - R\theta)\ ,$$

とでき，［2］で得られた結果から v に対して観測データ $\{v(R\omega,t) : \omega \in S^{n-1}\}$ から得られる次の量が $q(x)$ を一意的に決定することが従う。

$$\lim_{t\downarrow 0}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{t}\log\left(\frac{v(R\omega,t)}{p(R\omega,R(\theta-\omega),t)}\right)$$

$$\text{for}\ \ \forall(\theta,\omega) \in S^{n-1}\times S^{n-1},$$

ただし，$p(x,y,t) = (2\pi t)^{-n/2}\exp\left(-\frac{1}{2t}|x-y|^2\right)$。

ここで，（1.3）の γ に対する supp の条件から

$$v(R\omega,t) = u(R\omega,t)$$

であることが従うので，結局

$$\lim_{t\downarrow 0}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{t}\log\left(\frac{u(R\omega,t)}{p(R\omega,R(\theta-\omega),t)}\right)$$

$$\text{for}\ \ \forall(\theta,\omega) \in S^{n-1}\times S^{n-1},$$

が $q(x) = -\frac{1}{2}\left(\Delta\gamma + |\nabla\gamma|^2\right)$ を一意的に決定すること

*　原稿受付　平成 19 年 9 月 28 日

**佐世保工業高等専門学校　一般科目

が従う。よって，一意性を得るために残された証明すべきことは $q(x)$ から $\gamma(x)$ を一意的に決定できるかということになる。

今までの考察と条件（1.3）から $\gamma(x)$ は次の楕円形偏微分方程式に対する境界値問題の解となる。

$$\Delta\gamma + |\nabla\gamma|^2 = -2q(x) \quad \text{in } |x| < R, \tag{1.7}$$

$$\gamma = 0 \quad \text{on } |x| = R, \tag{1.8}$$

ここで，$w(x) = \exp(\gamma(x))$ とおけば，境界値問題（1.7），（1.8）は w に対する次の境界値問題に変換される。

$$\Delta w + 2q(x)w = 0 \quad \text{in } |x| < R,$$

$$w = 1 \quad \text{on } |x| = R,$$

よく知られているように，この境界値問題の解が一意的に存在するための条件（cf.［1］）は $q(x) \le 0$ であるので，ここで $\gamma(x)$ に対して次の仮定

$$\Delta\gamma \ge 0, \tag{1.9}$$

をすれば $q(x)$ から $\gamma(x)$ を一意的に決定できることが従う。

以上の考察をまとめると次の結果を得る。

３．結果

観測データから決まる次の量

$$\lim_{t\downarrow 0}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{t}\log\left(\frac{u(R\omega,t)}{p(R\omega,R(\theta-\omega),t)}\right)$$

$$\text{for } \forall(\theta,\omega)\in S^{n-1}\times S^{n-1}$$

は $\gamma(x)$ を一意的に決定する。ここで，$u(x,t)$ は初期値問題（1.1）と（1.2）で $f(x) = \rho_\varepsilon(x - R\theta)$ とした解で，$\gamma(x)$ は（1.3）と（1.9）を満たすものとし，$p(x,y,t) = (2\pi t)^{-n/2}\exp\left(-\frac{1}{2t}|x-y|^2\right)$ である。

参考文献

[1]D. Gilberg and N. S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order (2nd Edition), Springer-Verlag, New York, 1983.

[2] S. Nakamura, A note on an inverse parabolic problem, Nihonkai Math. J. 16(2005), 85-88.