教科書における複素数教育の欠落について*

稲永善数**

On Lack of Instruction on Complex Numbers in School Textbooks

Yoshikazu　INENAGA

１．はじめに

文部科学省検定教科書や高専の教科書では、アメリカやヨーロッパのテキストの 500～600 ページと比し、200 ページ前後でまとめられている。それは教科書を主体にした授業がなされること、教科書の定価は文部科学省と財務省の間で決定されることから、採算を抜きにした教科書編集が出版社にはできないことが主な原因となっている。したがって、200 ページ前後の記述に絞られる教科書の行間は省略されることがあり、それに気づかないまま見過ごすことが多くなっている。
たとえば、すべての教科書に記述されている概念「α、β が複素数のとき、　$\alpha\cdot\beta=0$　⇒　$\alpha=0$　または　$\beta=0$」
は、実に 当たり前に見える記述であるが、この性質は決して当たり前の性質ではない。

昭和 48 年実施の高等学校学習指導要領が告示、数学の現代化を目指した課程が発足した当時は、授業の中で、実数との絡みの中で上記の証明を与えていたが、昨今では教育現場では、上記の性質を、「当たり前」の性質として証明することはない。このように、教科書記述と授業内容とのギャップが生じ、数学を問題解決のための「道具」的役割ばかりが強調されつつある。問題解決のために「道具」を創ることも数学の重要な教育の目的の一つであることを念頭におきながら議論を進める。

＊　　原稿受付　　平成 20 年９月 26 日
＊＊　佐世保工業高等専門学校　一般科目

２．目的

特に本論では「複素数」に絞り教科書から欠落しているものをとりあげ、その問題点と欠落部分を補い今後の複素数教育の有り様について提言する。

(1) 教科書の中でページ数の問題から敢えて省略する部分
(2) 教育的観点から省略する部分とあいまいさの部分
(3) 複素数を用いたときの道具についての部分
(4) 教科書記述の厳密な導入の限界部分
(5) 他の教科の応用部分に絞り本論を進める。

３．本論

(1)　教科書の中でページ数の問題から敢えて省略する部分

[1]　複素数を係数にもつ２次方程式の判別式は使えない理由

２次方程式　$ax^2+bx+c=0$　の判別式として　$D=b^2-4ac$ とおくと、解の公式から D>0 のとき、この２次方程式は異なる実数解をもち、D<0 のとき、異なる２つの虚数解をもつことがわかる。また、D=0 のときは、解はただ１つの実数である。これを、２つの実数解が重なった場合とみて２重解という。
（大日本図書、基礎数学・新編　高専の数学 1）

一方検定教科書では、
ここでは、係数a,b,cが実数である2次方程式　$ax^2+bx+c=0$を扱い、解は複素数の範囲で考えることにする。（東京書籍・実教出版・数研出版、数学Ⅱ）と明記しているが、同じ検定教科書でも、新編、新版、大版といわれる教科書（受験を目的とした教科書ではなく、わかりやすい記述をしたもの）では、各社、2次方程式　$ax^2+bx+c=0$の係数a,b,cが実数であることを断っていない。これは、高専の教科書と立場を同じくしている。

これは、以下のような事情がある。上記のような受験を目的とした教科書でも、数10年前までは2次方程式の係数が実数であることを断らず議論していたが、教育現場の指摘があったことから各社一斉にその文言を入れたのである。

実際に教育現場では、各教師がそのことは常識として授業の中で生徒、学生に対して断っていたものが、いつの間にか教科書の額面通りの授業がなされる傾向が著しくなり「係数は実数であることを入れることは教育的に重要ではないか」という意見が大勢を占めるようになったことによる。

たとえば、2次方程式

$x^2-(3-2i)x+(1-3i)=0$　を解くと

$\{x-(2-i)\}\{x-(1-i)\}=0$

$x=2-i,1-i$

判別式は

$D=(3-i)^2-4(1-3i)=1>0$

よって、「方程式は異なる実数解をもつ」などといったことが起こるので、受験版といわれる教科書では、敢えて係数が実数であることを断っている。しかし、係数が実数であれば、判別式 D<0　のとき、必ず「2つの異なる虚数解」となるので「２つの異なるという用語は不要ではないか」と指摘する意見もある。

[2]　複素数の大小関係が定義されない理由

実数の集合をRとする。以下(1)、(2)のように定めると、Rの中で考えてきた大小関係に関する性質がすべて証明できる。

(1)

任意のa∈R　に対して

$$a>0, \qquad a=0, \qquad -a>0$$

のうちいずれか一つ、しかも一つだけ成り立つ。

(2)

$$a>0, \qquad b>0 \qquad \Rightarrow \qquad a+b>0$$

かつ　$ab>0$

また、　$a>b \quad \Leftrightarrow \quad a-b>0$

と定める。

そこで、同じように複素数の集合C上にも上記の(1)、(2)の条件を満足する大小関係（>）が定義できたとする。

まず、$a\neq 0$なら　(1)より$a>0$　または$-a>0$である。

（ｉ）　$a>0$　ならば　(2) より

$a^2>0$

（ⅱ）$-a>0$　ならば　（２）より

$(-a)^2>0$

ゆえに、　$a\neq 0$　ならば　つねに　$a^2>0$

そこで、　$a=1$　とおくと

$$1^2>0 \Leftrightarrow 1>0$$

$a=i$　とおくと

$$i^2>0 \Leftrightarrow -1>0$$

これは、$1>0, \quad 1=0. \quad -1>0$

のいずれか一つ成り立つという条件（1）に矛盾する。

このようなことから、複素数Cの中では大小関係は定めない。

このことから、$1+i$　と　$3+4i$はどちらの方が大きいかという問題を考えることは無意

味である。そこで、原点からの距離をその大小関係にすると定義したとても、従来の距離の概念に反するので、原点からの距離を大小関係と定義するわけにはいかない。このような事情からを教科書に長々と記述するわけにはいかず

「複素数では大小関係は定義されない」

という簡単な記述するにとどまっている。

上記の内容は高等学校の生徒には難しすぎることから教育現場ではこれらの事項は詳しくは授業はできない。

(2) 教育的観点から省略する部分とあいまいさ

[1] 高等学校の教科書では「実数と同じ四則演算に従う」と書かれているが、ここで、「順序」を入れると、現場では混乱をする。教科書によっては、交換、結合、分配法則に触れない記述もある。教科書では単に、2次方程式の解を複素数に拡張するため、「$i^2=-1$」と規約しているにすぎない。演算も導入せずにいきなり、複素数の四則計算を入れるのは、教育的な配慮とみなすべきだろう。

[2] 剰余の定理、因数定理、解と係数の関係　など複素数の範囲で成り立つが、その記述は教科書には書かれていない。

しかし入試問題をはじめとする中で、複素数まで成立することを認めると簡単な解法になることが知られている。以下その例を示す。

$\boxed{\text{例}}$.

xの整式$f(x)$をx^2-2x+2で割ると、余りが$4x+1$となり、$x-3$でわると 18 となった。$f(x)$を$(x^2-2x+2)(x-3)$で割った余りを求めよ。

題意から

$f(x)=(x^2-2x+2)A(x)+4x+1$　①

$=(x-3)B(x)+18$　②

$=(x^2-2x+2)(x-3)C(x)+ax^2+bx+c$　③

ただし、

A(x),B(x),C(x)は商、a,b,c は定数

剰余の定理を複素数の範囲まで成立するので

$x^2-2x+2=0$ の解の１つ　$x=1+i$

を　①、③にそれぞれ代入すると

$4(1+i)+1=a(1+i)^2+b(1+i)+c$

これを整理すると

$5+4i=b+c+(2a+b)i$

実部と虚部を比較すると

$b+c=5,\quad 2a+b=4$

また、$x=3$をそれぞれ①、③に代入すると

$9a+3b+c=0$

これより、　$a=1,b=2,c=3$　を得、余りは　x^2+2x+3

となる。

高等学校の現場では、複素数を因数として代入する指導は行わない。一般的な解法はいろいろ考えられるが、ここでは省略する。

[3] 数学の現代化時代の入試問題の例が消える

$\boxed{\text{例}}$

nを１より大きい整数とし、$x^{2n}-\sqrt{2}x^n+1$、が、$x^2-\sqrt{2}x+1$ で割り切れるようなnの値のうち、最小なものを求めよ。（九州大学）

$x^2-\sqrt{2}x+1$＝０の解を極形式を用いて表し、ド=モアブルの定理を用いれば解答を得る。

このように教科書では複素数の範囲まで用

いることができると断っていないにもかかわらず、複素数の範囲までの応用例が入試問題には登場する。

以下の問題は試験の多く出題されるが、複素数の便利さを示す好例である。

(3) 複素数を用いたときの道具の部分

以下例を示すことによって題意の指摘とする。

例　数値計算での応用

$$\left(\frac{\sqrt{3}+3i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$$ を簡単にせよ。

上記の問題を 10 乗することは煩雑である。したがって、極形式に直し、ド＝モアブルの定理を用いると、以下のようになる。

$$\frac{\sqrt{3}+3i}{1-\sqrt{3}i}=\sqrt{3}\left\{\cos\left(\tfrac{\pi}{3}-\left(-\tfrac{\pi}{3}\right)\right)+i\sin\left(\tfrac{\pi}{3}-\left(-\tfrac{\pi}{3}\right)\right)\right\}$$
$$=\sqrt{3}\left(\cos\tfrac{2\pi}{3}+i\sin\tfrac{2\pi}{3}\right)$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}+3i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}=3^5\left(\cos\tfrac{20\pi}{3}+i\sin\tfrac{20\pi}{3}\right)$$
$$=243\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

例　初等幾何の応用

以下の問題は複素数を用いることによって証明することができる。古典的な問題を複素数という「道具」によって、再度見直した例である。

[1]　9 点円の定理

9 点円の定理の複素数を用いた証明

三角形の各辺の中点、各頂点から対辺に下した垂線の足、および各頂点と垂心を結ぶ 3 つの線分の中点の合計 9 個の点は、この三角形の外心と垂心を結ぶ中点を中心に持つ 1 つの円周上にある。

[2]　パスカルの定理

パスカルの定理の複素数を用いた証明

円に内接する六角形の相対する 3 組の辺がいずれも交わるとき、3 つの交点は一直線上にある。

例　解析的な応用

実平面の描かれた 2 次関数のグラフを複素数平面とみなすと 2 次方程式の虚数解の作図ができる。

例　複素積分を用いて実積分への応用

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2+\sin\theta}d\theta \qquad \int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$$

など、複素積分を用いて求める。

上記の問題は、高等学校の範疇では解決できない。

(4) 教科書の中にある厳密な導入の限界部分

以下教科書に書かれている記述内容を与える。

[1]「複素数の四則計算は、文字 i について整式や分数式の計算と同様に行い、i^2 が現れた -1 と置き換えればよい」大日本図書（新訂　基礎数学）

[2]「複素数の加減乗除は、i を 1 つの文字のように取り扱って整式と同じ方法で計算する。計算の途中で i^2 が　現れたとき、$i^2=-1$ とおき換える」森北出版（新編高専の数学 1）、東京書籍、数研出版、実教出版、啓林館（数学Ⅱ）

[3]　昭和 62 年数学Ⅰ（吉田耕作、栗田稔、戸田宏編、啓林館）では、「複素数の四則計算では $a+bi$ を $a+bx$ と同じように扱って計算し、

i^2 がでてきたら i^2 を -1 でおきかえる」

と書かれている。

いずれにしてもその「置き換えることの説明、妥当性は教科書の中には書かれてはいない」

このような表現に満足できない教科書執筆者（大阪書籍、浅野啓三編）が、現代化教科書の中で「複素数の章」での記述を「順序対」を導入し解説したが教育現場では採用されなかった。

[4]　下記の概念は正しいのか

$a > 0$ のとき、$\sqrt{-a} = \sqrt{a}i$　と定める。

とあるが、その保証はどうするのか。定義の妥当性についての記述はない。

実数からの複素数の構成を行うと上記の記述は明確になる。教科書としては、複素数の構成を書くスペースはないことから、上記の記述に留まっている。

[5]　係数 a, b, c が実数である 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

を扱い、解は複素数の範囲で考えることにする。（東京書籍（株）他）

このように、唐突に「解は複素数の範囲で考えることにする」と明記しているが、では、今まで自然数、整数、有理数そして実数の順（範囲）という順序で、方程式の解を授業で与えてきたことはない。解の範囲を拡張する数学的な考え方は、「指数法則」で後日学ぶことになっており、「複素数の範囲まで考える」ということは初出であるが、教科書の丁寧な記述はない。

(5) 他の教科への応用部分

教科書にはスペースの関係で記述できない部分を指摘する。

[1]　複素数の科学への応用例

たとえば、指数では　半減期、対数螺旋、PH などの等級、マグニチュード、音圧レベルなどがあるが、複素数では、科学的な応用例は少なくないにもかかわらず記述がない。電気理論の例がアメリカのテキストなどにあるが、内容が薄いものであり、応用例とまではいかない。複素数計算より電気理論の方に難しさがシフトするからかもしれない。

[2]　幾何学表示の意義・・デカルト座標との絡み

デカルト座標と比較をしながら、複素数平面にする意義、その特典についての記述はない。

複素数表示をする意義は授業の中で説明されるべき事項である。

[3]　複素数の歴史的記述

実数から複素数への導入、さらに四元数への数の拡張する理由とその数学的効果について考える必要がある。

[4]　現在でなくなった複素数の問題・・・現代化時代との比較

現代化時代は複素数の問題が正面から与えられており一般的に難しかったように思われる。現在は、センター試験の関係から複素数そのものの問題は影をひそめ当時の問題がすべて撤退している。

たとえば、複素数の幾何への応用などがその例である。

４．結び

高等学校検定教科書や高専で用いる教科書では、前述のように、記述の枚数の問題、教科書費用の問題がある。また、一斉教育が日本教育のお家芸であることから、教師主導の教科書となりがちである。生徒や学生の立場に立った教科書つくりにはなっていない。必然的に、内容を省略、簡略化したとしても、

それは数学教師が補えば済むことであるという暗黙の了解がある。しかしながら、数学の「コアー」というべき「数教育」がこれほどまでに問題点が多く、他の章も含めると多くの問題が潜んでいることは容易に類推することができる。

数学の土台というべき「数の概念」がこのように省略され、軽視されていく中で、実際には現場では数学教師も「教科書の記述の通りにのみ」授業を施す傾向が著しくなったという識者の指摘がある。その結果、数学を「問題解決」の単なる道具としてのみに価値を置く傾向となり、教科書本来の意味「教科書で教える」意義が薄れている。

生徒や学生が教科書の行間を読み取り、自ら証明を行うような深い読み方ができるような授業が望まれる。

参考文献

１）稲永善数：教科書数学Ⅰにみる 30 年間の変遷
日本数学教育学会誌、
Vol.75.No.1,pp.17-25(1993)

２）教科書、数学Ⅰ、Ⅱ
実教出版（株）昭和 52 年以降
東京書籍（株）昭和 44 年以降
啓林館（株）昭和 32 年以降

３）高専数学１・基礎数学
森北出版（株)、大日本図書（株）

４）文部科学省学習指導要領
昭和 23 年、昭和 26 年、昭和 38 年、昭和 48 年、昭和 57 年、平成 6 年、平成 15 年