確率微分方程式に対する境界値問題の漸近解析 *

中村　真一 * *

Asymptotic analysis of a boundary value problem for a stochastic differential equation

Shin-ichi NAKAMURA

１．序論

$(\Omega, \mathrm{F}, \mathrm{P})$ を完備確率空間，$L>0$ は定数として，領域 $D=\{x: 0<x<L\}$ において，次の確率微分方程式に対する境界値問題を考える。

$$\frac{d}{dx}\left(a^{\varepsilon}(x,\omega)\frac{d}{dx}u^{\varepsilon}(x,\omega)\right)=f(x) \quad \text{in } D\times\Omega\,, \tag{1.1}$$

$$u^{\varepsilon}(0,\omega)=u^{\varepsilon}(L,\omega)=0\,, \tag{1.2}$$

ここで $a^{\varepsilon}(x,\omega)$ は $a(x)\in L^{\infty}(D)$，$b(x)\in L^{\infty}(D)$

と $X(\omega)\in L^{\infty}(\Omega)$ を満たす確率変数によって

$$a^{\varepsilon}(x,\omega)=a(x)+\varepsilon b(x)X(\omega) \quad (\varepsilon>0) \tag{1.3}$$

なる形に表され，かつ

$$0<\alpha_1\le a^{\varepsilon}(x,\omega)\le\alpha_2<+\infty \tag{1.4}$$

なる条件を満たすものとし、$f(x)\in L^2(D)$ とする。

境界値問題（1.1）－（1.4）は $a(x)=b(x)=\lambda e^{-\kappa x}$

のとき，不均質材料である（$\kappa>0$ は不均質性を表すパラメータ）熱応力緩和型傾斜機能材料平板に対する定常問題である（cf.［1］，［2］）。$\varepsilon=0$ のときは決定論的な微分方程式の境界値問題となり，$\varepsilon>0$ の場合は不確定性が加わった非決定論的な確率微分方程式の境界値問題となる。

境界値問題（1.1）－（1.4）のように，微分方程式の係数に滑らかさがない場合（特に係数に不確定の要素を含む場合），当然の結果として，x に対して2 階微分可能な解を得ることが出来るかどうか分からないし，解の一意性も分からない。

そこで，この研究報告で考えたいことは，不確定性がある場合に対する境界値問題がどのような意味での解を持つのか（具体的には解が属する関数空間の設定と弱解の定義），その存在と一意性，さらにパラメータ $\varepsilon>0$ に対する解の漸近展開と誤差評価である。

これらの問題点を数理モデルを用いて明らかにすることは，現実の問題に数理解析を応用する場合に重要になる。

２．$X(\omega)$ に対する仮定と関数空間

まず（1.3）から確率変数 $X(\omega)$ は有界，すなわち $\|X\|_{L^{\infty}(\Omega)}=\sup_{\omega\in\Omega}|X(\omega)|\le\gamma$ である。

次に $X(\omega)$ から導かれる R^1 の Borel 集合 B

に対する測度 $\mu(B)=P(X^{-1}(B))$ が R^1 の

Lebesgue 測度に関して絶対連続であることを仮定すると，$y=X(\omega)$ に対して確率密度関数 $\rho(y)$ が存在するが，それが

$$0<\beta_1\le\rho(y)\le\beta_2<+\infty \tag{2.1}$$

を満たすことを仮定する。以上の仮定の下で

$$E[X(\omega)]=\int_{-\gamma}^{\gamma} y\rho(y)\,dy \quad (\rho(y) \text{ は(2.1) を満たす})$$

と表すことができる。

この $\rho(y)$ を用いて，境界値問題を解く為の関数空間を準備する。内積を

＊　原稿受付　平成 20 年 9 月 26 日

** 佐世保工業高等専門学校　一般科目

$$(v,w)_{\rho}=\int_{-\gamma}^{\gamma}\rho(y)\int_{0}^{L}v(x,y)w(x,y)\,dxdy$$

で定義する。$\|\cdot\|$ をこの内積から導かれたノルムとし，次の関数空間を考えると

$$L_{\rho}=\{v(x,y):D\times(-\gamma,\gamma)\to R^1,\ \|v\|<+\infty\},$$

L_{ρ} は内積 $(\cdot,\cdot)_{\rho}$ を持つ Hilbert 空間になる。

次に

$$a^{\varepsilon}(x,y)=a(x)+\varepsilon b(x)y \tag{2.2}$$

とすると，仮定（1.4）から

$$0<\alpha_1\le a^{\varepsilon}(x,y)\le\alpha_2<+\infty \tag{2.3}$$

となるので，ノルム $\|\cdot\|_W$ を

$$\|v\|_W^2=\int_{-\gamma}^{\gamma}\rho(y)\int_{0}^{L}a^{\varepsilon}(x,y)\,|\,\partial_x v(x,y)|^2\ dx\,dy$$

で定義することができ，これを用いて，Sobolev 空間を

$$W(D,\gamma)=\{v\in L_{\rho}:\|v\|_W<+\infty,\quad v(0,y)=0=v(L,y)\}$$

と定義することができる。

３．境界値問題の弱解について

まず境界値問題（1.1）－(1.4）を決定論的な境界値問題に変換する。境界値問題（1.1）－(1.4）の解 $u(x,\omega)$ は Ω 上の可測関数になっていなくては意味がない。そこで，Doob-Dynkin の補題（cf. [3]）を用いれば，$u(x,\omega)=u(x,X(\omega))$ と表されるから，$X(\omega)=y$ として，境界値問題（1.1）－(1.4）は次のパラメータ付の境界値問題に変換されることが従う。

$$\frac{d}{dx}\left(a^{\varepsilon}(x,y)\frac{d}{dx}u^{\varepsilon}(x,y)\right)=f(x)$$
$$\text{for }\ (x,y)\in D\times(-\gamma,\gamma), \tag{3.1}$$

$$u^{\varepsilon}(0,y)=u^{\varepsilon}(L,y)=0. \tag{3.2}$$

境界値問題（3.1）－(3.2）の弱解を変分法的定式化を用いて構成するために，$W(D,\gamma)\times W(D,\gamma)$ 上の双線形形式を

$$A(v,w)=\int_{-\gamma}^{\gamma}\rho(y)\int_{0}^{L}a^{\varepsilon}(x,y)\partial_x v(x,y)\cdot\partial_x w(x,y)\,dx\,dy$$

で定義する。このとき，Schwarz の不等式から

$$|A(v,w)|\le\|v\|_W\cdot\|w\|_W,\quad \forall v,w\in W(D,\gamma),$$

さらに

$$|A(v,v)|\ge\|v\|_W^2,\quad \forall v\in W(D,\gamma)$$

と評価できる。

また仮定（2.3）により，$C_1>0$ なる定数が存在して

$$|(f,v)_{\rho}|\le C_1\cdot\|v\|_W\cdot\|f\|_{L^2(D)} \tag{3.3}$$

となるので，Lax-Milgram の定理から，任意の $f(x)\in L^2(D)$ に対して，

$$A(u,v)=(a^{\varepsilon}(x,y)\partial_x u,\partial_x v)_{\rho}=(f,v)_{\rho},$$
$$\forall v\in W(D,\gamma) \tag{3.4}$$

を満たす境界値問題（3.1）－(3.2）の弱解 $u\in W(D,\gamma)$ が一意的に存在することが従う。

４．漸近解の構成

境界値問題（3.1）－(3.2）に $a^{\varepsilon}(x,y)$ の形（2.2）を代入すれば

$$\frac{d}{dx}\left((a(x)+\varepsilon b(x)y)\frac{d}{dx}u^{\varepsilon}(x,y)\right)=f(x)$$

となり，これから

$$\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{d}{dx}u^{\varepsilon}(x,y)\right)+\varepsilon y\frac{d}{dx}\left(b(x)\frac{d}{dx}u^{\varepsilon}(x,y)\right)=f(x)$$

となる。

そこで，境界値問題（3.1）－(3.2）の漸近解を構成するために，次の 2 つの境界値問題を考える。

$$\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{d}{dx}u(x,y)\right)=f(x) \quad \text{in} \quad D\times(-\gamma,\gamma)\,, \tag{4.1}$$

$$u(0,y)=u(L,y)=0\,. \tag{4.2}$$

と

$$\frac{d}{dx}\left(b(x)\frac{d}{dx}v(x,y)\right)=g(x) \quad \text{in} \quad D\times(-\gamma,\gamma)\,, \tag{4.3}$$

$$v(0,y)=v(L,y)=0\,. \tag{4.4}$$

境界値問題（4. 1）－（4. 2）に対して，解 u から f への対応 Φ，すなわち $\Phi(u)=f$ を考えれば，

Φ は $W(D,\gamma)$ からその双対空間 $W^*(D,\gamma)$ への

Isomorphism となっている。

同様に，境界値問題（4. 3）－（4. 4）に対して，解 v から g への対応 Ψ，すなわち $\Psi(v)=g$ は

$W(D,\gamma)$ からその双対空間 $W^*(D,\gamma)$ への

Isomorphism となっている。

以上から，この Φ,Ψ を用いれば

$$(\Phi+\varepsilon y\Psi)(u^\varepsilon)=f \tag{4.5}$$

となっていることが従う。Φ^{-1} が存在するので，（4. 5）はさらに次のように変形できる。

$$\Phi(I+\varepsilon y\Phi^{-1}\Psi)(u^\varepsilon)=f$$

故に

$$\begin{aligned} u^\varepsilon &= \left(\Phi(I+\varepsilon y\Phi^{-1}\Psi)\right)^{-1}(f) \\ &= (I+\varepsilon y\Phi^{-1}\Psi)^{-1}\Phi^{-1}(f) \end{aligned}$$

となる。

ここで $\varepsilon y\Phi^{-1}\Psi$ の作用素ノルムが 1 未満であれば，$(I+\varepsilon y\Phi^{-1}\Psi)^{-1}$ の部分は

$$\begin{aligned} &(I+\varepsilon y\Phi^{-1}\Psi)^{-1} \\ &\quad=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(\varepsilon y)^j\left(\Phi^{-1}\Psi\right)^j \end{aligned}$$

と Neumann 級数に展開でき，

これを用いれば

$$\begin{aligned} u^\varepsilon &= (I+\varepsilon y\Phi^{-1}\Psi)^{-1}\Phi^{-1}(f) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j(\varepsilon y)^j\left(\Phi^{-1}\Psi\right)^j\Phi^{-1}(f) \end{aligned} \tag{4.6}$$

と u^ε は $\varepsilon>0$ に関して展開できる。

ここで，$\varepsilon y\Phi^{-1}\Psi$ の作用素ノルムが 1 未満になる条件について考える。

弱解の定義から

$$\left(\Phi^{-1}\Psi(u),v\right)_\rho=\left(\Psi(u),v\right)_\rho$$

この右辺は $u,v\in W(D,\gamma)$ から

$$\begin{aligned} &\left(\Psi(u),v\right)_\rho \\ &\quad=\left(\partial_x(b(x)\partial_x u),v\right)_\rho \\ &\quad=-(b(x)\partial_x u,\partial_x v)_\rho \end{aligned}$$

となる。従って，

$$\begin{aligned} &\left|\left(\Phi^{-1}\Psi(u),v\right)_\rho\right| \\ &\le\left|(b(x)\partial_x u,\partial_x v)_\rho\right| \end{aligned} \tag{4.7}$$

を得る。

ここで $a^\varepsilon(x,y)$ に対する仮定（2. 3）から

$$0<\alpha_1<\sup_{D\times(-\gamma,\gamma)}\left|a^\varepsilon(x,y)\right|<\alpha_2<+\infty$$

が成立するので，（4. 7）は

$$\begin{aligned} &\left|\left(\Phi^{-1}\Psi(u),v\right)_\rho\right| \\ &\le\left|\left(a^\varepsilon(x,y)\frac{b(x)}{a^\varepsilon(x,y)}\partial_x u,\partial_x v\right)_\rho\right| \\ &\le\sup_{D\times(-\gamma,\gamma)}\left|\frac{b(x)}{a^\varepsilon(x,y)}\right|\cdot\left|(a^\varepsilon(x,y)\partial_x u,\partial_x v)_\rho\right| \\ &\le\frac{\|b\|_{L^\infty(D)}}{\alpha_1}\cdot\|u\|_W\cdot\|v\|_W \end{aligned}$$

のように評価できる。

故に $\Phi^{-1}\Psi:W\to W$ の作用素ノルムを $\left\|\Phi^{-1}\Psi\right\|_{OP}$ で表せば，

$$\left\|\Phi^{-1}\Psi\right\|_{OP}\le\frac{\|b\|_{L^\infty(D)}}{\alpha_1} \tag{4.8}$$

を得る。

従って $\varepsilon y\Phi^{-1}\Psi$ の作用素ノルムは $|y|\le\|X\|_{L^\infty(\Omega)}$ であることから

$$\begin{aligned}&\|\varepsilon y\Phi^{-1}\Psi\|_{OP}\\&\le\varepsilon\cdot|y|\cdot\frac{\|b\|_{L^\infty(D)}}{\alpha_1}\\&\le\varepsilon\cdot\|X\|_{L^\infty(\Omega)}\cdot\frac{\|b\|_{L^\infty(D)}}{\alpha_1}\end{aligned}$$

と評価でき，$\|\varepsilon y\Phi^{-1}\Psi\|_{OP}<1$ となるためには

$\varepsilon>0$ を $\varepsilon\cdot\|X\|_{L^\infty(\Omega)}\cdot\dfrac{\|b\|_{L^\infty(D)}}{\alpha_1}<1$ となるように十分小さく選べばよいことが分かる。さらに，このとき（4.6），（3.3），（4.8）から

$$\begin{aligned}&\left\|u^\varepsilon-\sum_{j=0}^{N}(-1)^j(\varepsilon y)^j\left(\Phi^{-1}\Psi\right)^j\Phi^{-1}(f)\right\|_W\\&=\left\|\sum_{j=N+1}^{\infty}(-1)^j(\varepsilon y)^j\left(\Phi^{-1}\Psi\right)^j\Phi^{-1}(f)\right\|_W\\&\le\sum_{j=N+1}^{\infty}\varepsilon^j\cdot\gamma^j\cdot\|\Phi^{-1}\Psi\|_{OP}^j\cdot C_1\cdot\|f\|_{L^2(D)}\\&=\frac{\varepsilon^{N+1}\cdot\gamma^{N+1}\cdot\|\Phi^{-1}\Psi\|_{OP}^{N+1}}{1-\varepsilon\cdot\gamma\cdot\|\Phi^{-1}\Psi\|_{OP}}\cdot C_1\cdot\|f\|_{L^2(D)}\\&=\frac{\varepsilon^{N+1}\cdot\gamma^{N+1}\cdot\left(\dfrac{\|b\|_{L^\infty(D)}}{\alpha_1}\right)^{N+1}}{1-\varepsilon\cdot\gamma\cdot\dfrac{\|b\|_{L^\infty(D)}}{\alpha_1}}\cdot C_1\cdot\|f\|_{L^2(D)}\end{aligned}$$

なる誤差評価が従う。
以上をまとめて，次の結果を得る。

5．結果

【命題】 境界値問題（1.1）－（1.4）に対して，$X(\omega)$ は§２の仮定を満たすものとする。このとき，（3.4）を満たす弱解が一意的に存在し，

$\varepsilon>0$ を $\varepsilon\cdot\|X\|_{L^\infty(\Omega)}\cdot\dfrac{\|b\|_{L^\infty(D)}}{\alpha_1}<1$ となるように選べば $X(\omega)=y$ として，弱解 $u^\varepsilon(x,y)$ の ε に対する漸近展開

$$u^\varepsilon(x,y)=\sum_{j=0}^{N}(-1)^j(\varepsilon y)^j\left(\Phi^{-1}\Psi\right)^j\Phi^{-1}(f)+O(\varepsilon^{N+1})\qquad(5.1)$$

が成立する。ただし，Φ,Ψ は境界値問題（4.1）－（4.4）に対して定義したものである。

【注意】弱解の漸近展開（5.1）から

$$E[u^\varepsilon(x,\omega)]=\Phi^{-1}(f)-\varepsilon\cdot E[X(\omega)]\cdot\Phi^{-1}\Psi\Phi^{-1}(f)+O(\varepsilon^2)$$

であるので，$\Phi^{-1}(f)$ が $\varepsilon=0$ の時の解であることを考えれば，不確定性を考慮した解の期待値と不確定性が存在しない解とのずれは，ε が小さいとき，$\varepsilon\cdot E[X(\omega)]\cdot\Phi^{-1}\Psi\Phi^{-1}(f)$ 程度となっていることが分かる。

参考文献

[1] 傾斜機能材料研究会編，傾斜機能材料，工業調査会，1993.
[2] Y. Sugano, R. Chiba, T. Kanno, H. Hoshi, Stochastic Thermal Stress Analysis in Functionally Graded Plates Subjected to Random Surface Temperatures, Thermal Stresses, Vol.4, pp.357-360, 2001.
[3] B. Oksendal, Stochastic Differential Equations, Springer-Verlag, 1998.
[4] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle, Dunod, 1983.