常微分方程式に対する境界値逆問題*

中村　真一**

An inverse boundary value problem for an ordinary differential equation

Shin-ichi NAKAMURA

１．序論

$L>0$ は定数として，領域 $D=\{x:0<x<L\}$ において，次の常微分方程式に対する境界値問題を考える。

$$\left(a(x)u_x(x)\right)_x = f(x) \quad \text{in} \quad D\,, \tag{1.1}$$

$$u(0)=0,\quad a(L)\cdot u_x(L)=\alpha\,, \tag{1.2}$$

ここで $f_x(x)$ は x に関する $f(x)$ の導関数を表し，$\alpha\in R^1$，$a(x)\in K$，

$$K\equiv\left\{a(x)\in H^1(D):0<c_0\le a(x)\le c_1,\ a_x(x)\le 0\right\}, \tag{1.3}$$

なる条件を満たすものとし，$f(x)\in L^2(D)$ とする。

境界値問題（1.1）－（1.2）は $a(x)=\lambda_0 e^{-\kappa x}\in K$ のとき，不均質材料である（$\lambda_0>0$ は $x=0$ での材料の拡散係数であり，$\kappa>0$ は不均質性を表すパラメータである）熱応力緩和型傾斜機能材料平板に対する定常問題である（cf.［1］）。

この研究報告で考えたいことは，$x=L$ で Neumann データ $a(L)\cdot u_x(L)=\alpha$ を与え，観測される Drichlet データ $u(L)=\beta$ から $a(x)$（拡散係数に相当）を決定できるかという逆問題であり，数学的には境界値問題（1.1）－（1.2）の解 $u(x)$ は係数 $a(x)$ に依存しているので，$u(x)=u(x;a)$ と表せば, 非線形汎関数方程式 $u(L;a)=\beta$ が与えられた β に対し $a(x)$ に関して解けるかどうかということになる。しかし，現実的には観測データ等には誤差がつきものなので，逆問題を汎関数

$I(a)=\left|u(L;a)-\beta\right|$ の最小化問題：

$$\min_{a(x)\in K} I(a)=\min_{a(x)\in K}\left|u(L;a)-\beta\right| \tag{1.4}$$

として捕らえなおす方がより現実的である。Tikhonov はこの汎関数最小化問題の解を quasisolution と呼んでいる（cf.［2]）。

２．境界値問題の解の性質と関数空間 K について

まず境界値問題（1.1）－（1.2）の解と（1.3）で定義した関数空間 K について，わかっていることを補題としてまとめる。

【補題 1】 境界値問題（1.1）－（1.2）は一意的な解 $u\in V\equiv\left\{v\in H^1(D):u(0)=0\right\}$ を持ち，次のエネルギー不等式が成り立つ：

$$\|u\|_{H^1(D)}\le\frac{L^2+\sqrt{2}L}{2c_0}\left\{\|f\|_{L^2(D)}+\sqrt{\frac{2}{L}}\cdot|\alpha|\right\}.$$

証明は［3］参照。

次に関数空間 K について次の事実が従う。

【補題 2】 関数空間

$$K\equiv\left\{a(x)\in H^1(D):0<c_0\le a(x)\le c_1,\ a_x(x)\le 0\right\}$$

は $H^1(D)$ の中でコンパクトである。

証明は［4］参照。

３．解の係数に関する連続依存性について

最小化問題（1.4）を考えるために，まず

＊　原稿受付　平成 20 年 9 月 26 日

＊＊ 佐世保工業高等専門学校　一般科目

$I(a)=|u(L;a)-\beta|$ が a の連続関数になっている

ことを証明する。その為に係数を摂動した
（$a,b\in K$， $\varepsilon>0$ として）

$$\left((a(x)+\varepsilon b(x))u_x^{\varepsilon}(x)\right)_x=f(x) \tag{3.1}$$

$$u^{\varepsilon}(0)=0,\quad (a(L)+\varepsilon b(L))\cdot u_x^{\varepsilon}(L)=\alpha\,, \tag{3.2}$$

なる境界値問題を考える。
［5］で得られた漸近解析の結果の証明において，
$b\in K$ と Sobolev の埋蔵定理から，

$\|b\|_{L^{\infty}(D)}\le C\cdot\|b\|_{H^1(D)}$ が成立することを用いれば, 次

の補題が成立することが従う。

【補題 3】境界値問題（3.1）−(3.2）の解 $u^{\varepsilon}(x)$ に

対して，次の評価式が成立する。

$\varepsilon>0$ を $\varepsilon\cdot\dfrac{\|b\|_{H^1(D)}}{c_0}<1$ となるように選べば

$$\left\|u^{\varepsilon}-u^0\right\|_{H^1(D)}\le C\cdot\frac{\varepsilon\cdot\dfrac{\|b\|_{H^1(D)}}{c_0}}{1-\varepsilon\cdot\dfrac{\|b\|_{H^1(D)}}{c_0}}\cdot\|f\|_{L^2(D)} \tag{3.3}$$

が従う。ここで，$u^0(x)$ は境界値問題（1.1）−（1.2）

の一意解である。

4．最小化問題について

最小化問題（1.4）について，次の命題が成り立つ。

【命題】最小化問題（1.4）は Tikhonov の意味の quasisolution を持つ。

【証明】まず補題 3 の評価式（3.3）と Sobolev

空間 $H^1(D)$ に対するトレース定理から，汎関数

$I(a)=|u(L;a)-\beta|$ は $a(x)\in K$ の連続関数にな

っていることがわかる。次に補題 2 から，関数空
間 K はコンパクトであるので，

Bolzano–Weierstrass の定理を用いれば

$I(a)=|u(L;a)-\beta|$ を最小にする $a(x)\in K$ が存

在することが従う。

参考文献

[1] 傾斜機能材料研究会編，傾斜機能材料，工業調査会，1993.

[2] A. N. Tikhonov and V. Y. Arsenin, Solution of ill-posed problems, Wiley, New York, 1977.

[3] A. Hasanov and T. S. Shores, Solutions of an Inverse Coefficient Problem for an Ordinary Differential Equation, Applicable Analysis, 67 (1997), 11-20.

[4] W. Rudin, Principles of Mathematical Analysis, McGraw-Hill, New York, 1976.

[5] 中村真一，確率微分方程式に対する境界値問題の漸近解析，佐世保高専研究報告書第 45 号，2008.