教科書記述に観るコアーとしての複素数について*

稲永善数**

On Complex Number as the Core to Watch in a Textbook Description

Yoshikazu　INENAGA

１．はじめに

文部科学省の高等学校検定教科書、高等専門学校の教科書などは、約 200 ページ前後で教材がまとめられている。昨今の検定教科書をはじめとする教科書は、各社同じような章の配列をとり、それを疑問視することなく現場では授業がなされている。昭和 40 年代の現代化運動時代に導入された「集合」「行列」「ベクトル」などは現代でもその流れは大局的には変わりがない。しかしその中で、特に当時は「複素数」の扱いに関しては、実数の拡張として、あるいは応用面での「数学のコアー」として当時は重要視されたが、現在では「複素数」の扱いは軽視されわずか「２次方程式の複素数解」というレベルで扱われているのが実情である。このような「複素数」の扱いに対し、現代の高等学校の検定教科書に欠落した部分を指摘、それを補うことにより深い数学のコアーとしての複素数の考え方、応用面などについて本論では考察する。

教科書主体の授業が施されることは当然であるが、複素数を数学教育のコアーとして考えたとき、多くの欠落事項があることを指摘することができる。

本論では、それらの欠落部分を指摘し、さらに複素数教育において発展的な教材として考える部分を提示することを目的としている。教科書に記述されている行間は、教育現場では省略されることが多く、生徒も教師も気がつかないまま見過ごしていることがある。

たとえば

α, β　は複素数で、$\alpha\beta = 0$

のとき、$\alpha=0$　または　$\beta=0$

は一見当たり前のような記述であるが、この性質は現場では証明されることはない。昭和 48 年実施の高等学校指導要領が告示、数学の現代化が目指した課程が発足した当時は、数学の厳密性が求められた為、上記の事項は証明されることが多かった。しかし、現在では既知のこととして証明されることはないと言ってよい。

このように教科書に記述されているものでさえ、理解しているとは言いがたいものが多く含まれている。数学は、問題解決の単なる「道具」としての役割が重要視されて傾向が強くなった。

以下次の点を考慮し議論を進める。

２．目的

本論では「複素数」に絞り教科書から欠落しているものをとりあげ、その問題点と欠落部分を補い今後の複素数教育の有り様について提言する。

以下の項目に絞り本論を進める。

1. 教育的観点から省略する部分とあいまいさの部分
2. 教科書の中でページ数の問題から敢えて省略する部分
3. 複素数を用いたときの道具についての部分
4. 複素数の拡張や厳密な概念導入の限界部分
5. 他の教科の応用部分

---

*　原稿受付　　平成 21 年 9 月 30 日

**　佐世保工業高等専門学校　一般科目

３．本論

３．１　教育的観点から省略する部分とあいまいさの部分

１）　$i^2=-1$ は規約

①　高等学校の教科書では

「実数と同じ四則演算に従う」

と書かれているが、ここで、「順序」を入れると、現場では混乱をする。教科書によっては、交換、結合、分配法則に触れない記述もある。教科書では単に、2次方程式の解を複素数に拡張するため、「$i^2=-1$」と規約しているにすぎない。いきなり複素数の四則計算を導入するのは教育的な配慮とみなすべきだろう。

②　複素数の範囲での諸定理

剰余の定理、因数定理、解と係数の関係　など複素数の範囲で成り立つが、その記述は教科書には書かれていない。

しかし入試問題をはじめとする中で、複素数まで成立することを認めると簡単な解法になることが知られている。以下その例を示す。

例　x の整式 $f(x)$ を x^2-2x+2 で割ると、余りが $4x+1$ となり、$x-3$ でわると 18 となった。$f(x)$ を $(x^2-2x+2)(x-3)$ で割った余りを求めよ。

これを複素数の範囲まで剰余の定理が成り立つとして簡単な解答を試みる。題意から

$$f(x)=(x^2-2x+2)A(x)+4x+1 \quad ①$$
$$=(x-3)B(x)+18 \quad ②$$
$$=(x^2-2x+2)(x-3)C(x)+ax^2+bx+c \quad ③$$

ただし $A(x),B(x),C(x)$ は商、a,b,c は定数

剰余の定理は複素数の範囲まで成立するので $x^2-2x+2=0$ の解の１つ　$x=1+i$　を①、③にそれぞれ代入すると

$$4(1+i)+1=a(1+i)^2+b(1+i)+c$$

これを整理すると

$$5+4i=b+c+(2a+b)i$$

実部と虚部を比較すると

$$b+c=5,\quad 2a+b=4$$

また、$x=3$ をそれぞれ②、③に代入すると

$$9a+3b+c=18$$

これより、$a=1,\quad b=2,\quad c=3$

よって、余りは　x^2+2x+3

高等学校の現場では、上記のように複素数を因数として代入する指導は行わない。一般的な解法はいろいろ考えられるが、ここでは省略する。

２）数学の現代化時代の入試問題例

例　n を1より大きい整数とし、$x^{2n}-\sqrt{2}x^n+1$、が、$x^2-\sqrt{2}x+1$　で割り切れるような n の値のうち、最小なものを求めよ。（九州大学）

$x^2-\sqrt{2}x+1=0$ の解は

$$x=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2}=\cos\frac{\pi}{4}\pm i\sin\frac{\pi}{4}$$

のように極形式で表し、ド=モアブルの定理を用いれば解答を得る。

このように教科書では複素数の範囲まで用いることができると断っていないにもかかわらず、複素数の範囲までの応用例が現代でも入試問題には登場する。

以下の問題は試験の多く出題されるが、複素数の便利さを示す好例である。

３）数の拡張としての複素数の扱い

以下、数の拡張としての複素数の扱いについて例を述べる。

①　実数としての指数関数や対数関数であったものを複素数の指数関数や対数関数に拡張

すること

$$e^{1+\pi i} \qquad ,\sqrt[3]{i}, \qquad \log i$$

などの値を求めることなどは、高等学校の範疇から外されている。

② 複素係数をもつ２次方程式の解の公式

a,b,c が複素数で、$a \neq 0$ であるとき

$$az^2 + bz + c = 0$$

の解は、$z = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

と表すことができることなども記述はない。

３．２ 教科書の中でページ数の問題から敢えて省略する部分

１） 複素数を係数にもつ２次方程式の判別式

２次方程式の係数は実数と断っているか

２次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式として $\mathrm{D} = \mathrm{b}^2 - 4ac$ とおくと、解の公式から D>0 のとき、この２次方程式は異なる実数解をもち、D<0 のとき、異なる２つの虚数解をもつことがわかる。また、D=0 のときは、解はただ１つの実数である。これを、２つの実数解が重なった場合とみて２重解という。

（大日本図書、基礎数学・新編 高専の数学 1）

一方検定教科書では、

ここでは、係数 a,b,c が実数である２次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ を扱い、解は複素数の範囲で考えることにする。

（東京書籍・実教出版・数研出版、数学Ⅱ）

と明記しているが、同じ検定教科書でも、新編、新版、大版といわれる教科書（受験を目的とした教科書ではなく、わかりやすい記述をしたもの）では、各社、２次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の係数 a,b,c が実数であることを断っていない。これは、高専の教科書と立場を同じくしている。

これは、以下のような事情がある。上記のような受験を目的とした教科書でも、数 10 年前までは２次方程式の係数が実数であることを断らず議論していたが、教育現場の指摘があったことから各社一斉にその文言を入れたのである。

実際に教育現場では、各教師がそのことは既知なものとして授業の中で生徒、学生に対して断っていたものが、時代を経ると教科書の額面通りの授業がなされる傾向が著しくなり

「係数は実数であることを入れることは教育的に重要ではないか」

という意見が大勢を占めるようになったことによる。

例　２次方程式

$$x^2 - (3-2i)x + (1-3i) = 0$$

を解くと

$$\{x-(2-i)\}\{x-(1-i)\} = 0$$

$$x = 2-i, 1-i$$

判別式は　$D = (3-i)^2 - 4(1-3i) = 1 > 0$

よって、

「方程式は異なる実数解をもつ」

などといったことは、授業の中では解説することがなくなった。

従って、受験版といわれる教科書では、敢えて係数が実数であることを断っている。

例　係数が実数であれば、判別式 D<0 のとき、必ず「２つの異なる虚数解」となることは自明であるから「２つの異なるという用語は不要ではないか」と指摘する現場の意見などもある。

２） 複素数の大小関係は定義されない

教科書では、

「虚数については、大小関係や正・負は考えない」

と１行で記載されているのみである。

（数学Ⅱ、数研出版、実教出版、東京書籍など）
この事項を少し穴埋めすると以下のようになる。

実数の集合をRとする。以下(1)、(2)のように定めると、Rの中で考えてきた大小関係に関する性質がすべて証明できる。

(1)　任意の$a \in \mathrm{R}$　に対して

$$a>0, \qquad a=0, \qquad -a>0$$

のうちいずれか一つ、しかも一つだけ成り立つ。

(2)　$a>0, \quad b>0 \quad \Rightarrow \quad a+b>0$

かつ　$ab>0$

また、　$a>b \quad \Leftrightarrow \quad a-b>0$　と定める。

そこで、同じように複素数の集合C上にも上記の(1)、(2)の条件を満足する大小関係（>）が定義できたとする。

まず、$a \neq 0$なら　(1)より$a>0$　または$-a>0$である。

（ⅰ）　$a>0$　ならば　(2)より　　$a^2>0$

（ⅱ）$-a>0$　ならば　(2)より　$(-a)^2>0$

ゆえに、　$a \neq 0$　ならば　つねに　$a^2>0$

そこで、　$a=1$　とおくと　$1^2>0 \Leftrightarrow 1>0$

$a=i$　とおくと　$i^2>0 \Leftrightarrow -1>0$

これは、$1>0, \quad 1=0. \quad -1>0$

のいずれか一つ成り立つという条件（1）に矛盾する。

このようなことから、複素数Cの中では大小関係は定めない。

このことから、$1+i$　と　$3+4i$はどちらの方が大きいかという問題を考えることは無意味となる。そこで、原点からの距離をその大小関係にすると定義したとても、従来の距離の概念に反するので、原点からの距離を大小関係と定義するわけにはいかない。このような理由からを教科書の中で長々と記述するわけにはいかず

「複素数では大小関係は定義されない」
という簡単な記述するにとどまっている。

上記の内容は高等学校の生徒には難しすぎることから教育現場ではこれらの事項について授業はできない部分となっている。しかし、現場ではこのような事情も知らずに授業を進める教師が増えてきたという事実が指摘されている。

３．３　複素数を用いたときの道具についての部分

以下例を示すことによって題意の指摘とする。

１）数値計算での応用

$$\left(\frac{\sqrt{3}+3i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$$ を簡単にせよ。

上記の問題を10乗することは煩雑である。したがって、極形式に直し、ド＝モアブルの定理を用いると、以下のようになる。

$$\frac{\sqrt{3}+3i}{1-\sqrt{3}i}=\sqrt{3}\left\{\cos\left(\tfrac{\pi}{3}-\left(-\tfrac{\pi}{3}\right)\right)+i\sin\left(\tfrac{\pi}{3}-\left(-\tfrac{\pi}{3}\right)\right)\right\}$$
$$=\sqrt{3}\left(\cos\tfrac{2\pi}{3}+i\sin\tfrac{2\pi}{3}\right)$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}+3i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}=3^5\left(\cos\tfrac{20\pi}{3}+i\sin\tfrac{20\pi}{3}\right)$$
$$=243\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

２）　初等幾何の応用

以下は、古典的な問題を複素数という「道具」によって、証明ができる例である。

①　　9点円の定理

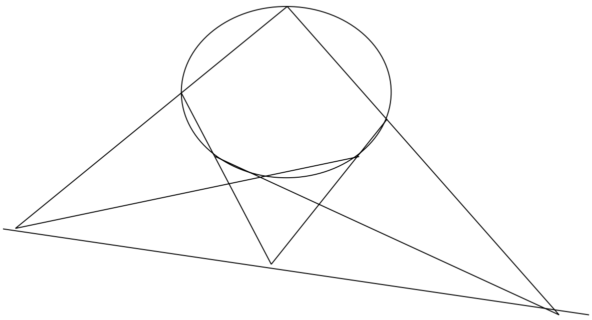
9点円の定理の複素数を用いた証明

三角形の各辺の中点、各頂点から対辺に下した垂

線の足、および各頂点と垂心を結ぶ 3 つの線分の中点の合計 9 個の点は、この三角形の外心と垂心を結ぶ中点を中心に持つ１つの円周上にある。

② パスカルの定理

パスカルの定理の複素数を用いた証明
円に内接する六角形の相対する 3 組の辺がいずれも交わるとき、3 つの交点は一直線上にある。



③ 解析的な応用

実平面を複素数平面と同一視する

例

実平面の描かれた 2 次関数のグラフを複素数平面とみなすと 2 次方程式の虚数解の作図ができる。

与えられた放物線と円との交点が 2 次方程式の虚数解になる。(証明は略)

上記のように、実平面であれば虚数解は表示できなかったが、複素数平面では、虚数解の存在を確かめることができ、また 2 次方程式の複素数の解が共役であることを理解することができる。

例　複素積分を用いて実積分への応用

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{3-\cos\theta}d\theta \qquad \int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx$$

など、複素積分を用いて求める。

上記の問題は、高等学校の範疇では解決することは困難である。複素数にし、｜z|<1 に含まれる極の留数を用いて求める。

３．４　複素数の拡張に関する厳密な概念導入の限界部分

以下教科書に書かれている記述内容を与える。

１)「i」を x とみなして計算する理由

① 「複素数の四則計算は、文字 i について整式や分数式の計算と同様に行い、 i^2 が現れた -1 と置き換えればよい」大日本図書（新訂基礎数学)

② 「複素数の加減乗除は、i を１つの文字のように取り扱って整式と同じ方法で計算する。計算の途中で i^2 が　現れたとき、$i^2=-1$ とおき換える」森北出版（新編高専の数学１)、東京書籍、数研出版、実教出版、啓林館(数学Ⅱ)

③ 　昭和 62 年数学Ⅰ（吉田耕作、栗田稔、戸田宏編、啓林館）では、「複素数の四則計算では $a+bi$ を $a+bx$ と同じように扱って計算し、i^2 がでてきたら i^2 を -1 でおきかえる」と書かれている。

いずれにしてもその
「置き換えることの説明、妥当性は教科書の中には書かれてはいない」

このような表現に満足できない教科書執筆者（大阪書籍、浅野啓三編）が、現代化教科書の中で「複素数の章」での記述を「順序対」を導入し解説したが教育現場では採用されなかった。

２）$a>0$ のとき、$\sqrt{-a}=\sqrt{a}i$　と定める理由

上記の保証はどうするのか。定義の妥当性についての記述はない。

実数からの複素数の構成を行うと上記の記述は明確になる。教科書としては、複素数の構成を書くスペースはないことから、上記の記述に留まっている。

３）係数 a,b,c が実数である 2 次方程式

$$ax^2+bx+c=0$$

を扱い、解は複素数の範囲で考えることにする。

（東京書籍（株）他）

このように、唐突に「解は複素数の範囲で考えることにする」と明記しているが、では、今まで自然数、整数、有理数そして実数の順（範囲）という順序で、方程式の解を授業で与えてきたことはない。解の範囲を拡張する数学的な考え方は、「指数法則」で後日学ぶことになっており、「複素数の範囲まで考える」ということは初出にもかかわらず教科書の丁寧な記述はない。

４）複素数を係数にもつ 2 次方程式の解を判別

教科書では､2 次方程式の解の判別については、その係数は実数であるが、複素数を係数にもつ 2 次方程式の解の判別はどのように考えればいいのだろうか。

その具体例を述べる。

2 次方程式

$x^2+(a+bi)x+(c+di)=0$　…　①

とすると､（ただし、a,b,c,d　は実数）

判別式 D は

$$D=(a+bi)^2-4(c+di)$$
$$=a^2-b^2-4c+i(2ab-4d)$$

ここで、$2ab-4d=0$ とおく。

［1］重解をもつ場合、すなわち　$D=0$　のとき

（$d=\frac{1}{2}ab$　を満たす）

$$c=\tfrac{1}{4}(a^2-b^2)$$

①　は　$\{x+\frac{1}{2}(a+bi)\}^2=0$

となり、重解をもつ。

［2］　①の式に、$d=\frac{1}{2}ab$ を代入すると

$$\{x+\tfrac{1}{2}(a+bi)\}^2-\tfrac{1}{4}(a^2-b^2-4c)=0$$

これより

$$x=-\frac{1}{2}(a+bi)\pm\frac{\sqrt{a^2-b^2-4c}}{2}$$

ここで、

①　$a=0$　のとき　$d=0$　であるから

判別式　$D=-b^2-4c$

$D>0$　のとき､$x=-\dfrac{1}{2}bi\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{-b^2-4c}$

$D<0$　のとき　$x=-\dfrac{1}{2}bi\pm\dfrac{i}{2}\sqrt{b^2+4c}$

となり純虚数である

②　$b=0$　のとき　$d=0$　であるから

判別式 $D=-b^2-4c$

$D>0$　のとき　$x=-\dfrac{1}{2}a\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2-4c}$

で実数解

$D<0$　のとき　$x=-\dfrac{1}{2}a\pm\dfrac{i}{2}\sqrt{-a^2+4c}$

で、係数を実数とする判別式の虚数解が与えられる。

３．５　他の教科への応用部分

教科書にはスペースの関係で記述できない部分を指摘する。

1）他の章との関連事項についての議論
① 複素数とベクトルとの関連
② 複素数と行列との関連
③ 数として考える場合、複素数と数列の扱い
④ 複素数の幾何学的な面
⑤ 三角形の面積や形状、偏角と絶対値
⑥ ド＝モアブルの定理などの応用例
⑦ 複素数の数としての式計算
⑧ 方程式の解と図形的意味
など

２）複素数の科学への応用例

たとえば､指数では　半減期､対数螺旋､PH､などの等級、マグニチュード、音圧レベルなどがある。一方複素数では、科学的な応用例は少なくないにもかかわらずその記述がない。電気理論の例などアメリカのテキストなどにあるが、内容が薄いものであり、応用例とまではいかない。複素数計算より電気理論の方に難しさがシフトするからかもしれない。

３）幾何学表示の意義

デカルト座標との絡みデカルト座標と比較をしながら、複素数平面にする意義、その特典についての記述はない。

複素数表示をする意義は授業の中で説明されるべき事項である。

４）複素数の歴史的記述

実数から複素数への導入、さらに四元数への数の拡張する理由とその数学的効果について考える必要がある。

５）現在でなくなった複素数の問題・・・現代化時代との比較

現代化時代は複素数の問題が正面から与えられており一般的に難しかったように思われる。

現在はセンター試験の関係から複素数そのものの問題は影をひそめ当時の問題がすべて撤退している。たとえば、複素数の幾何への応用などがその例である。

４．結び

高等学校検定教科書や高専で用いる教科書では、前述のように、記述の枚数の問題、教科書費用等の問題がある。また、一斉教育が日本教育の伝統芸であることから、教師主導の教科書となりがちであり生徒や学生の立場に立った教科書つくりにはなっていない。たとえ内容を省略、簡略化したとしても、それは「数学教師が補えば済むことである」という立場をとる傾向がある。

しかしながら、数学の「コアー」というべき「複素数」の応用面も多様にあるにもかかわらず軽く扱われている現実を再認識する必要がある。

今まで述べたように、数学の土台というべき「数の概念」がこのように省略され、軽視されていく中で、実際には現場では数学教師も「教科書の記述の通りにのみ」授業を施す傾向が著しくなったという識者の指摘の結果として、数学を単なる「問題解決」の手段のみに価値を置くことになりより発展的な考え方を阻害することになっている。現代は教科書本来の意味である「教科書で教える」意義が薄れている。

そのような意味で、複素数の持つ意義を再認識し、生徒や学生が教科書の行間を読み取り、自ら証明を行うような深い読み方ができるような授業や教材作りが望まれる。

参考文献

１）稲永善数：教科書数学Ｉにみる 30 年間の変遷、日本数学教育学会誌、Vol.75.No.1,pp.17-25(1993)
２）教科書、数学Ｉ、Ⅱ
実教出版（株）昭和 52 年以降
東京書籍（株）昭和 44 年以降
啓林館（株）昭和 32 年以降
３）高専数学 1・基礎数学
森北出版（株)、大日本図書（株）
４）文部科学省学習指導要領
昭和 23 年、昭和 26 年、昭和 38 年、昭和 48 年、昭和 57 年、平成 6 年、平成 15 年