弧度法指導に関する考察

稲　永　善　数

A　consideration on the Circular Measure Instruction

Yoshikazu　　INENAGA

１．はじめに

　ある私立大学工学部教授が「学生は全く弧度法を理解していない」といくつかの例を示しながら話された。その問題点は　①　「弧度法導入の意義」　②「弧度法を度数法に直せないこと」　の二つに絞られた。高等学校では数学Ⅱの「三角関数」の章で初めて弧度法を導入する。数学Ⅰの「三角比」の章ではまだ度数法のまま指導している。高等工業専門学校では、専門科目の必要性から、本校では中学校卒業したばかりの前期に「三角関数」の章で弧度法を導入する。問題なく理解していると確信していたが、定期試験で、以下のようなものを出題すると、全く理解していないことが判明した。その問題点の解析と対策についての考察をする。

２．本論

以下、３つの観点から議論をすすめる。

（１）教科書の「弧度法」の定義

（２）「弧度法」導入の意義

（３）本校学生の「弧度法」が定着しない理由

(１)　教科書の記述に関して

①　高専教科書の記述

　高専の数学Ⅰ（森北出版（株））では、一般角を導入した後、弧度法を以下のように定義している。

角を測る単位として度・分・秒を用いてきた。角の大きさを表すもう 1 つの方法を述べよう。半径 r の円で、中心角が α^0 　の孤の長さを l とする。このとき、$\frac{l}{r}$ の値は半径 r に関係なく、角の大きさによって定まるから、この値を

$$\theta = \frac{l}{r}$$

とおき、角は θ ラジアンであるという。

1 ラジアンは、半径 r と同じ長さの円弧が作る中心角の大きさである。半径 r の半円周の長さは πr であり、その中心核は 180^0 であるから

$$\pi \text{ ラジアン} = 180^{\ 0}$$

と記述している。さらに

$$1 \quad \text{ラジアン} = \frac{180^0}{\pi} \qquad 1^{\ 0} = \frac{\pi}{180} \text{ ラジアン}$$

とし、ラジアンを単位とする角の測り方を弧度法といい、弧度法では普通はラジアンを省略して数値だけで表す。たとえば

$$90^0 = \frac{\pi}{2} \quad \cdot\cdot\cdot$$

上記の記述で学生が間違いを起こす要素が 2 つある。１つ目は「何のために弧度法を導入するのかという理由」が不明であること。２つ目は、$90^0 = \frac{\pi}{2}$ 　と記述したために、たとえば

$\frac{\pi}{5} = 36^0$ 　であるが、その平方根をとると

$\sqrt{\frac{\pi}{5}} = \sqrt{36^0} = 6^0$ 　などと書いてしまうことになる。単位が異なるものを等号「＝」で結んでいるが故の混乱である。１(m)＝100(cm)の平方根をとると１m＝10cm とするのと同じ理屈である。

＊　　　原稿受付　平成 24 年 10 月 2 日

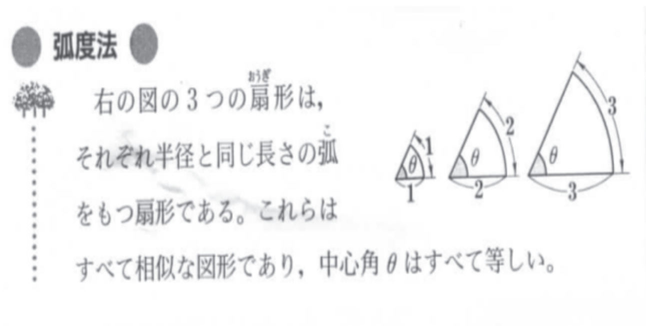
＊　＊　佐世保工業高等専門学校　　一般科目

② 文科省検定教科書の記述

（実教出版、数研出版、東京書籍（株））

これまで、角の大きさを表すのに、直角の $\dfrac{1}{90}$ である１^{0}を単位とする度数法とよばれる表し方を用いてきた、ここでは、弧度法とよばれる角の大きさの表し方について学んでいこう。

（検定教科書実教出版（株）数学Ⅱより抜粋）



● 弧度法 ●

右の図の３つの扇形は，それぞれ半径と同じ長さの弧をもつ扇形である。これらはすべて相似な図形であり，中心角 θ はすべて等しい。

半径 r の円において、半径と同じ長さ r の孤に対する中心角の大きさは、r の大きさに関係なく一定である。この角の大きさを１ラジアン、または１弧度という。１ラジアンを単位として角の大きさを表す方法を弧度法という。

中心角の大きさは弧の長さに比例するから、半径を r、弧の長さを l とする扇形の中心角 θ は

$$\theta = \frac{l}{r} \text{ラジアン}$$

とくに、$l = \pi r$ のときは、半円となり、中心角は 180^{0} であるから

$$180^{0} = \pi \text{ラジアン}$$

上のことから次のことが成り立つ。

$$1 \quad \text{ラジアン} = \frac{180^{0}}{\pi} \qquad 1^{0} = \frac{\pi}{180} \text{ラジアン}$$

なお、弧度法では、単位名ラジアンを省略することが多い。

と記述している。

①、②の記述の仕方はかなり異なっている。結果は同じように見えるが、検定教科書では

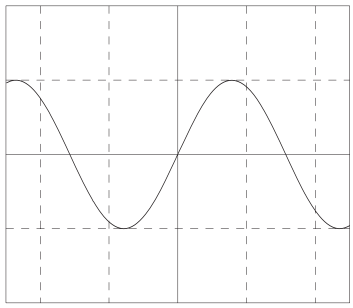
「半径 r の円において、半径と同じ長さ r の孤に対する中心角の大きさは、r の大きさに関係なく一定である。この角の大きさを１ラジアン、または１弧度という。」というように弧度法は、具体例を通し、「r の大きさに関係なく一定」であることを説明している。

一方、高専の教科書では天下り的に導入しているのがわかる。しかし、教科書だけでは「何故弧度法を導入するのかの意義」は全く見えない。

ここで、誤った記述の教科書の例を紹介する。

弧度法が定着しないことから、ある検定教科書は次のような関数のグラフを紹介している。

$y = \sin x$



$y = \sin x$

のグラフ上の目盛がいい加減に描いてある。

上記は、$y = \sin x$ のグラフ表示であるかのように見える。しかし 180^{0} の x 座標は、$\pi = 3.1415$・・・の目盛となってはいない。これは正確な「関数 $y = \sin x$」のグラフ表示ではない。おおよその三角関数のグラフが描ければいいと考えているがこれは教育指導上の誤りである。

x, y 座標の目盛を変えるには、指数関数や対数関数のグラフ表示のところで学ぶべきであり、ここでは、x, y の目盛間隔は等しくしておく必要がある。正しい三角関数のグラフ表示を見せておくことが教育上重要である。

（２） 弧度法導入の意義

ここで、「弧度法」導入の意義について述べる。

① 単位系の問題 $\theta = \dfrac{l}{r}$ は 長さの比；

$\dfrac{\text{円周の長さ}}{\text{半径の長さ}}$ は単位として無名数であるから、度を用いる必要はない。

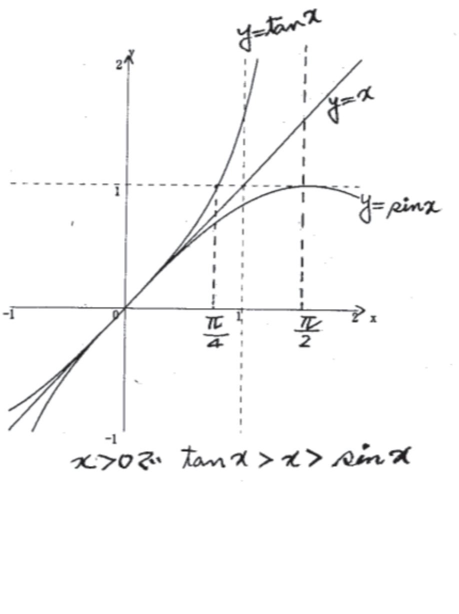
② 三角関数の変数を度に制限すると、たとえば合成関数　$y = \sin(\cos x)$ などが定義でき意味を持つ。$y = \sin(\cos 60^0)$ などは度数法であれば定義できない。また、x, y 軸同じ長さの単位であれば x 軸, $y = \sin x$, $x = \pi$ で囲まれた部分の面積Ｓは $S = \int_0^{\pi} \sin\ xdx$,　x 軸の周りに回転してできる立体の体積 Ｖ は、$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 xdx$　のように、積分を用いて求められるが、もしこれが度数法であったら、面積や体積を求めることに意味をもたなくなる。

（３）本校学生の「弧度法」に関する理解度

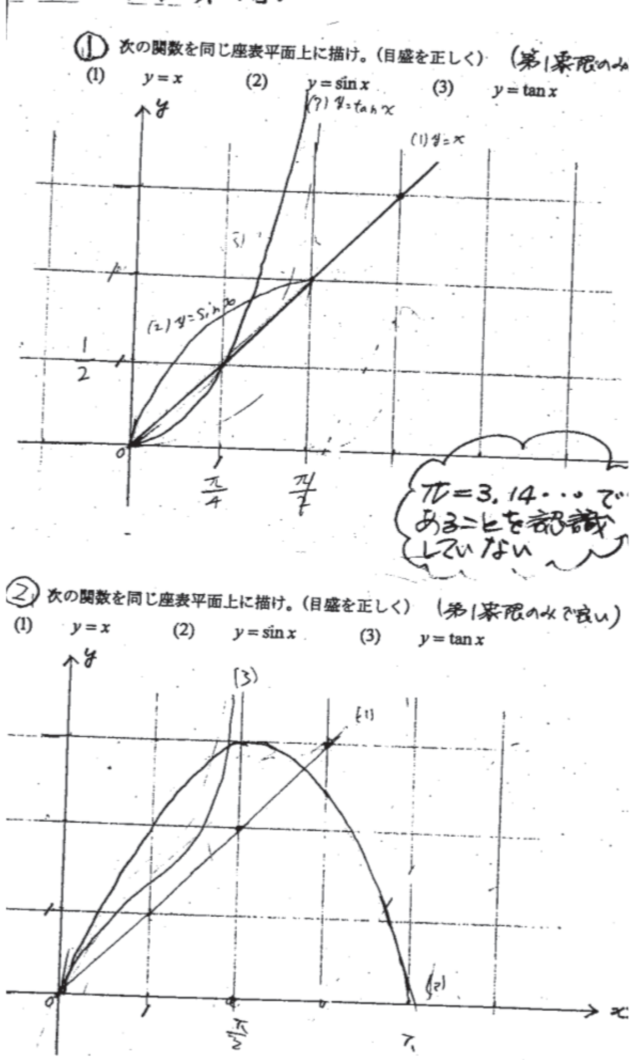
①　２年生、３年生２クラス、４ 年生の４クラスに以下のようなものをグラフ表示させた。これは弧度法を理解しているかどうかを測る良問と筆者は考えた。

「$y = x,$　　$y = \sin x,$　　$y = \tan x$　の３つの関数を同じ座標平面上にグラフ表示せよ。」

＜ 正しいグラフ ＞



＜学生の答案例＞



$y = \sin x$ と $y = x$ 、$y = \tan x$ と $y = \sin x$ が交点をとるように描いたものがほとんどであった。また、$x = \dfrac{\pi}{2}$ などの目盛を入れずに適当に感覚だけで描くものが多かった。

$x > 0$ で　$\tan x > x > \sin x$　であることを理解していないと上記の表示はできない。

それぞれのグラフをそれぞれ単独で表示することは学んできた。それはあくまで概形であり、３つを同時に表示するとき、それぞれのグラフの大小関係を考える必要がある。

以下は、上記のグラフの正解率を与える。

	正解者
2S	1（44名中）
3M	5（44名中）
3S	6（34名中）
4年 数学特論	3（20名中）

上記のように正解率は10.5 ％　だった。
今回は特に目盛を最初から与えている。目盛を与えないと正解者は0になる可能性があった。

② 弧度法の理解を確認するために、更に以下の問題を与えた。
本校の学生2S、3M、3Sの問題と結果は以下の通りである。

問
次の弧度法を度数法に、度数法は弧度法に直せ

① 1ラジアン＝　② $\frac{1}{\pi}$ ラジアン＝

③ $\sqrt{\frac{\pi}{4}}$ ラジアン＝　④ π^0 ＝

⑤ $\sqrt{\frac{\pi}{5}}$ ラジアン＝　⑥ （$\sqrt{25}$）^{0}＝

正解数

	6問	5問	4問	3問	2問	1問	0問
2S	2	0	0	0	2	22	20
3M	8	2	4	3	8	4	5
3S	9	3	3	6	7	4	12

2年生の1問正解の学生は、ほとんど　⑥の

$5^o = \frac{\pi}{36}$ ラジアンであった。また、①がほとんど不正解であったことは弧度法の指導が誤っている証左ではないかと考える。このように不正解が多いのは、

$$1 \text{　ラジアン} = \frac{180^0}{\pi} \qquad 1^0 = \frac{\pi}{180} \text{ラジアン}$$

という換算の方法を明確に理解していないために起こったことにある。単に「比例的に」$180^0 = \pi$ラジアンを用いただけで、しかも「ラジアン」という単位を省略したために起こる誤りである。
また、3年生が2年生に比べ正解率が高いのは、微分や積分を学んでいるため、弧度法を常時利用しているからではないかと考えられる。特に3Mの全問正解は24%、3Sは20%であり、機械工学など弧度法を利用する機会が多いからではないかと類推する。
多くの学生は、

たとえば、「$180^0 = \pi$」と暗記しており、$90^0 = \frac{\pi}{2}$

は、比例関係によって、2で割っただけで考えている。

$$1 \text{　ラジアン} = \frac{180^0}{\pi} \quad \text{であるから}$$

$$\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{5} \times \frac{180^0}{\pi} = 36^0$$

であり、$1^0 = \frac{\pi}{180}$ ラジアンであるから

$$30^0 = 30 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6} \text{ラジアン}$$

「π^0をラジアンにする」には、ほとんどの学生は答えることができない。単位の考え方から

$\pi^0 = \pi \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi^2}{180}$ ラジアン　であるが、その結果は上述したとおりである。原因の一つには、ラジアンという単位を省略したことにある。

$\frac{1}{\pi} rad = \frac{1}{180^o}$ と書いた答案が多く、$180^0 = \pi$を そのまま書いたに過ぎない。分子の1をラジアンであるとは考えていない結果による。

（3）　弧度法が定着しない理由

① 小学校からの単位に対する指導

換算に関する学習は、分数や小数の導入で、

$[dl, l], [cm, m], [g, kg]$ などを学んでいる。
中学生になると「さんすう」から生活とかけ離れた「数学」となるため、単位の考え方は姿を消し、無名数を扱うことが当然のように学んできた。
しかし高等学校や高専では、「弧度法」という「角度の単位」を「長さの単位」として扱わなければならないために、「なぜ、度を用いたら駄目なのか」を理解しないまま授業が進められてしまう。教科書記述がそのような点に注意を払っていないためである。

② 直角を 90 等分した度数法が生活の中に
また。度数法で「角度」を測ってきた生活の延長上にあり、すぐには「弧度法」になれない現実もあると考えられる。私たちは「マイル」や「ヤード」になれないのと同じ理由からである。

直角を 100 等分したものを 1^0 としても、単位として問題は生じないが、歴史的な流れから「度数法」を用いているだけである。

③ 度数法に固執する理由

三角比の学習では、「30^0、45^0、60^0」など三角定規で与えられた角度が答えとして頻繁に教科書、問題集、更にセンター試験にまで登場する。

現代化運動以前（昭和 57 年以前）の教科書では、必ずしも上記のような角度は多くはなかった。三角関数表を用いて、23.3^0 のような小数を伴った値を答えとして導き出すことが当然のように出題されている。教科書が実生活に基づいた記述に徹しており、現在の教科書のように実生活と遊離した記述とは異なっている。現在は小数表記された角度は消え、三角比の様々な公式を用いた求め方だけが指導の主流となっている。高等学校や高等工業専門学校でも弧度法に切り替えたとき、教科書に出現する弧度法は「$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi,$・・・、$2\pi$」などの限定された特殊な角度が、主流であり、たとえば、23.3^0 を弧度法で表すなどという作業等は現場では指導しない。すなわち、上記のような特殊な値を弧度法に置き換えただけで弧度法を使いこなす演習がほとんど行われないことがその原因のひとつに挙げられる。

３．おわりに

以上の議論から以下のことを提言したい。

（1） 弧度法だけの学習に転換

学生が理解に苦しむ原因の一つが、単位に関する「換算」方法を理解しないまま進められてきたことにも原因がある。（特に戦前は、小学校から換算に関する学習は、「さんすう」や数学の重要な位置を占めていた。）

専門科目の高度な知識を必要とするためには、その基本となる「弧度法」は避けて通れるものではない。このような理由から、学生が混乱を生じる「度数法」という従来の角度を全く斬り捨て、新しい単位として、初めから「弧度法」を指導する方が混乱は生じにくいのではないだろうか。

すなわち、「換算」という概念を省くのである。「半径と円弧の関係」だけで角度を表す手法を指導すれば、角度を長さとしてみなすことができる。円弧の分割として「弧度法」を捉える方が学生は理解しやすいと考えられる。度数法を「間」に挟む必要がないことから、余計な指導は省略することができる。これは「分母の有理化」のように必要になれば換算すればよいと考えた方がよい。

また、「単位」に関する概念をもう一度見直す授業が重要であると考える。

⑵ 「単位」に関する概念学習の深化

数の「単位元」、行列の「単位行列」、ベクトルの「単位ベクトル」など、数学に横たわる全て

の概念に単位がある。数直線上の「正負」は、「１」という単位から数直線上に実数を表示できるという概念を生み出す。このように一般的に用いられる「g、kg、cm、m」のようなものではなく、数学概念に関する「単位」指導は重要である。

参考図書

1. 高専の数学１、森北出版
2. 文科省検定教科書数学Ⅱ、実教出版、数研出版、
東京書籍、啓林館（株）
3. 危機に立つ日本の理数教育、高等教育フォーラム、
明石書店（2005）
４. 昭和 23 年学習指導要領、文部省
5. 昭和 26 年学習指導要領、文部省
6. 昭和 31 年学習指導要領、文部省
7. 昭和 38 年学習指導要領、文部省
8. 昭和 48 年学習指導要領、文部省、
9. 昭和 57 年学習指導要領、文部省、
10. 平成 6 年学習指導要領、　文部省
11. 平成 15 年学習指導要領、文部科学省