一般化された Burgers 方程式に対する初期・境界値問題について *

中村 真一 **

On the initial-boundary value problem for the generalized Burgers' equation

Shin-ichi Nakamura

1. 序論

次の一般化された Burgers 方程式の初期・境界値問題について考える．

$$u_t + uu_x - u_{xx} + a(x)u = f(x,\, t) \quad \text{in} \quad Q \equiv (0,\,1) \times (0,\, T) \tag{1.1}$$

$$u(0,\, t) = u(1,\, t) = 0 \quad \text{in} \quad (0,\, T) \tag{1.2}$$

$$u(x,\, 0) = u_0(x) \quad \text{in} \quad I \equiv (0,\, 1) \tag{1.3}$$

ここで，$T > 0$ であり，$u_0(x) \in H_0^1(I)$，$f(x,\, t) \in L^2(Q)$ とする．また $a(x)$ は次の条件を満たすものとする．

$$a \in L^\infty(I) \text{ であり，正定数 } a_1 \text{ が存在して} \quad 0 < |a(x)| \leqq a_1 \quad \text{が成立する．} \tag{1.4}$$

(1.1) において $a(x) \equiv 0$ の場合が Burgers 方程式と呼ばれているものである．(1.1) は断面が変化する管の中を一方向に伝播する非線形音波の振る舞いを記述する方程式を表し，一般化された Burgers 方程式と呼ばれている（例えば [1] 参照）．

2. 弱解の定義と近似解

定義 2.1　関数 $u \in L^\infty(0,\, T,\, L^2(I)) \cap L^2(0,\, T,\, H_0^1(I))$ が (1.1)〜(1.3) の弱解であるとは，次の等式を満たすときをいう．

$$\int_0^1 (u_t w + uu_x w + u_x w_x + auw)\, dx = \int_0^1 fw\, dx \quad \text{for} \quad \forall w \in H_0^1(I),\ \forall t \in (0,\, T) \tag{2.1}$$

(1.1) の弱解が存在することを証明するために，$\{e_j\}_{j=1}^\infty$ を $L^2(I)$ の正規直交基底かつ $H_0^1(I)$ の直交基底になるように選ぶ．つまり，e_j は $-\partial_x^2$ の $L^2(I)$ での Dirichlet 問題の固有値 λ_j に対する固有関数である．
このとき，$v \in L^2(Q)$ に対し

$$v = \sum_{k=1}^\infty b_k(t) e_k = \sum_{k=1}^\infty (v,\, e_k)_{L^2(I)} e_k$$

と表すことができ，この級数は $L^2(I) \cap H_0^1(I)$ で収束する．

u の近似解 u_n を

$$u_n(t) = \sum_{j=1}^\infty c_j(t) e_j, \quad u_n(0) = u_{0n} = \sum_{j=1}^\infty c_j(0) e_j$$

とし，次の近似問題を満たすものとする．

$$\int_0^1 (\partial_t u_n e_j + u_n \partial_x u_n e_j + \partial_x u_n \partial_x e_j + au_n e_j)\, dx = \int_0^1 fe_j\, dx \tag{2.2}$$

$$u_n(0) = u_{0n} \tag{2.3}$$

$$\text{for } j = 1,\, \cdots,\, n,\ \text{ and } 0 \leqq t \leqq T.$$

---

* 原稿受付 平成 28 年 10 月 20 日

** 佐世保工業高等専門学校 一般科目

補題 2.1 任意の j に対して，問題 (2.2) の局所解 u_n が一意的に存在する．

証明 $(e_i,\, e_j) \equiv (e_i,\, e_j)_{L^2(I)} = \delta_{ij}$ であるから，

$$\int_0^1 \partial_t u_n e_j\, dx = \sum_{i=1}^n c_i'(t) \int_0^1 e_i e_j\, dx = c_j(t)'$$

となる．一方，$-\partial_x^2 e_i = \lambda_i e_i$ より $\partial_x^2 u_n(t) = -\sum_{i=1}^n c_i(t)\lambda_i e_i$ であるから，

$$\int_0^1 \partial_x u_n \partial_x e_j\, dx = \sum_{i=1}^n c_i(t)\lambda_i \int_0^1 e_i e_j\, dx = c_j(t)\lambda_j$$

が成り立つ．ここで，

$$f_j(t) = \int_0^1 f e_j\, dx, \quad k_j(t) = \int_0^1 u_n \partial_x u_n e_j\, dx, \quad h_j(t) = \int_0^1 a u_n e_j\, dx$$

とおくと，(2.2) は次の線形常微分方程式系に等しい．

$$c_j'(t) = -\lambda_j c_j(t) - h_j(t) - k_j(t) + f_j(t) \quad \text{and} \quad c_j(0) = (u_0,\, e_j) \quad \text{for} \quad j = 1, \cdots, n. \tag{2.4}$$

線形常微分方程式の一般論から，(2.4) には局所解が一意的に存在する． □

この局所解を接続して大域解を得るには，解 u_n に対するアプリオリ評価が必要になる．

3. アプリオリ評価

補題 3.1 n に依存しない正定数 C_1 が存在して，次の不等式が成立する．

$$||u_n||_{L^2(I)}^2 + \int_0^t ||\partial_x u_n(s)||_{L^2(I)}^2\, ds \leqq C_1 \quad \text{for} \quad \forall t \in [0,\, T].$$

証明 (2.2) に c_j をかけて $j = 1, \cdots, n$ に対して加えて，$\displaystyle\int_0^1 \partial_x u_n u_n^2\, dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \partial_x(u_n^3)\, dx = 0$ を用いると

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u_n^2\, dx + \int_0^1 (\partial_x u_n)^2\, dx + \int_0^1 a u_n^2\, dx = \int_0^1 f u_n\, dx$$

を得る．両辺を t に関して積分すると

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}||u_n||_{L^2(I)}^2 + \int_0^t ||\partial_x u_n(s)||_{L^2(I)}^2\, ds \\
&\qquad \leqq \frac{1}{2}||u_{0n}||_{L^2(I)}^2 + \int_0^t ||f(s)||_{L^2(I)}||u_n(s)||_{L^2(I)}\, ds + a_1 \int_0^t ||u_n(s)||_{L^2(I)}^2\, ds
\end{aligned}$$

を得る．ここで，不等式

$$|AB| \leqq \frac{\delta}{2}A^2 + \frac{1}{2\delta}B^2, \quad \delta > 0$$

を用いれば

$$\begin{aligned}
&||u_n||_{L^2(I)}^2 + 2\int_0^t ||\partial_x u_n(s)||_{L^2(I)}^2\, ds \\
&\qquad \leqq ||u_{0n}||_{L^2(I)}^2 + \delta \int_0^t ||u_n(s)||_{L^2(I)}^2\, ds + \frac{1}{\delta}\int_0^t ||f(s)||_{L^2(I)}^2\, ds + 2a_1 \int_0^t ||u_n(s)||_{L^2(I)}^2\, ds \\
&\qquad \leqq ||u_{0n}||_{L^2(I)}^2 + (2a_1 + \delta)\int_0^t ||u_n(s)||_{L^2(I)}^2\, ds + \frac{1}{\delta}\int_0^t ||f(s)||_{L^2(I)}^2\, ds
\end{aligned}$$

であるので，

$$\begin{aligned}&||u_n||^2_{L^2(I)}+\int_0^t ||\partial_x u_n(s)||^2_{L^2(I)}\,ds\\&\quad\leqq ||u_{0n}||^2_{L^2(I)}+\frac{1}{\delta}\int_0^t ||f(s)||^2_{L^2(I)}\,ds+(2a_1+\delta)\int_0^t\left(||u_n(s)||^2_{L^2(I)}+\int_0^s ||\partial_x u_n(\tau)||^2_{L^2(I)}\,d\tau\right)ds\end{aligned}$$

を得る．ここで，条件 $u_0(x)\in H^1_0(I)$，$f(x,t)\in L^2(Q)$ からある正定数 C_2 が存在して，不等式

$$||u_{0n}||^2_{L^2(I)}+\frac{1}{\delta}\int_0^t ||f(s)||^2_{L^2(I)}\,ds\leqq C_2$$

が成り立つから，結局

$$\begin{aligned}&||u_n||^2_{L^2(I)}+\int_0^t ||\partial_x u_n(s)||^2_{L^2(I)}\,ds\\&\quad\leqq C_2+(2a_1+\delta)\int_0^t\left(||u_n(s)||^2_{L^2(I)}+\int_0^s ||\partial_x u_n(\tau)||^2_{L^2(I)}\,d\tau\right)ds\end{aligned}$$

となり，Gronwall の不等式から，

$$||u_n||^2_{L^2(I)}+\int_0^t ||\partial_x u_n(s)||^2_{L^2(I)}\,ds\leqq C_2e^{(2a_1+\delta)t} \tag{3.1}$$

を得るので，$C_1=C_2e^{(2a_1+\delta)T}$ とすれば，補題 3.1 を得る． □

注意 3.1 Poincare の不等式

$$||u_n||^2_{L^2(I)}\leqq\frac{1}{2}||\partial_x u_n||^2_{L^2(I)}$$

を用いれば，補題 3.1 は次のように書き換えることができる．

補題 3.2 n に依存しない正定数 C_1 が存在して，次の不等式が成立する．

$$||u_n||^2_{L^2(I)}+\int_0^t ||u_n(s)||^2_{H^1_0(I)}\,ds\leqq C_1\quad\text{for}\quad\forall t\in[0,T].$$

注意 3.2 この不等式と Hilbert 空間の弱コンパクト性から $u_n(t)$ は $L^2(I)$ で $u(t)$ に弱収束し，かつ $\partial_x u_n(t)$ は $L^2(0,T,L^2(I))$ で $\partial_x u(t)$ に弱収束することが分かる．

補題 3.3 補題 3.2 の部分列 $u_n(t)$ は $L^2(0,T,L^2(I))$ で強収束する．

$$||u_n-u||_{L^2(0,T,L^2(I))}\to 0,\quad n\to\infty$$

証明 [2] の補題 2.4 参照.

注意 3.3 補題 3.1，補題 3.3 と Lebesgue の収束定理から，ほとんどいたるところの $t\in[0,T]$ に対して，$u_n(t)$ は $u(t)$ に $L^2(I)$ で収束することが従う．

以上の弱収束列の性質を用いて弱解の存在を証明する．

4. 弱解の存在証明

弱解の定義から

$$\int_0^1 (\partial_t u_n w + u_n \partial_x u_n w + \partial_x u_n w_x + a u_n w)\, dx = \int_0^1 f w\, dx \quad \text{for} \quad \forall w \in C_0^\infty(Q).$$

この式の両辺を t で積分し，部分積分を用いると

$$\int_Q (-u_n w_t + u_n \partial_x u_n w + \partial_x u_n \partial_x w + a u_n w)\, dxdt = \int_Q f w\, dxdt.$$

注意 3.2，注意 3.3 から

$$\lim_{n\to\infty} \int_Q (-u_n w_t + \partial_x u_n \partial_x w + a u_n w)\, dxdt = \int_Q (-u w_t + \partial_x u \partial_x w + a u w)\, dxdt$$

を得る．従って，次の補題 4.1 が証明できれば弱解の存在が分かる．

補題 4.1　$n \to \infty$ のとき，次が成り立つ．

$$\int_Q u_n \partial_x u_n w\, dxdt \to \int_Q u \partial_x u w\, dxdt$$

証明

$$\int_Q (u_n \partial_x u_n w - u \partial_x u w)\, dxdt = \int_Q (u_n - u)(\partial_x u_n w)\, dxdt + \int_Q (\partial_x u_n - u_x)(uw)\, dxdt$$

と変形する．右辺の第 2 項は u_n が u に $L^2(Q)$ で弱収束することを用いれば 0 に収束することが分かる．また，右辺の第 1 項は Schwartz の不等式から

$$\int_Q (u_n - u)(\partial_x u_n w)\, dxdt \leqq ||u_n - u||^2_{L^2(Q)} \cdot ||\partial_x u_n w||^2_{L^2(Q)}$$

と評価でき，$\partial_x u_n$ が $L^2(Q)$ での弱収束列であることから $||\partial_x u_n w||^2_{L^2(Q)}$ は有界となるので，補題 3.3 から，右辺の第 1 項も 0 に収束することが従う．　□

また，(3.1) のエネルギー不等式で $C_2 = 0$ の場合を考えれば，弱解の一意性が分かる．　□

5. 参考文献

【1】 D. G. Crighton, Frontiers in Physical Acoustics (ed. D. Sette) Proc. Intl. School of Physics (North-Holland, Amsterdam, 1986).

【2】 O.A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, and N.N. Ural'ceva, Linear and quasilinear equations of parabolic type. Trans. Am. Math. Soc. 23 (1968).

【3】 G. Kreiss and H.-O. Kreiss, Convergence to steady state of solutions of Burgers' equation, Appl. Numer. Math., 2 (1986) pp. 161-179.