Codazzi 多様体上の双断面曲率について*

堂平 良一**

On the bisectional curvature on Codazzi manifold

Ryouichi DOUHIRA

1. 序論

多様体 M 上の捩じれのないアファイン接続 D と Rimmann 計量 g が M 上の任意のベクトル場 X, Y, Z に対して Codazzi 方程式

$$(D_X g)(Y, Z) = (D_Y g)(X, Z)$$

を満たすとき，組 (D, g) を Codazzi 構造といい，Codazzi 構造が与えられた多様体 M を Codazzi 多様体という。Levi-Civita 接続 ∇ での曲率テンソルを使えば，接空間内の 2 次元平面 ρ に対して値が定まる断面曲率を定義できるが，計量 g が接続 D に関して平行ではないことが理由で，接続 D で定義される曲率テンソルでは断面曲率を定義することができない。ここでは Codazzi 構造 (D, g) から定義される双対接続と呼ばれる新たな接続 D' と D の両方を使って断面曲率に対応するようなテンソルを定義する。

2. 双対接続と曲率テンソル

定義 2.1　Codazzi 構造 (D, g) をもつ Codazzi 多様体 M に対し，新たな接続 D' を

$$Xg(Y, Z) = g(D_X Y, Z) + g(Y, D'_X Z)$$

によって定める。この接続 D' を D の g に関する 双対接続，(D', g) を (D, g) の 双対 Codazzi 構造 という。また，g の Levi-Civita 接続を ∇ とするとき，テンソル場 $\gamma = \nabla - D$ を接続 D の差テンソルという。

補題 2.1 ([1],[2])　Codazzi 構造 (D, g) をもつ Codazzi 多様体 M の双対接続 D' とする。このとき，次の (1)〜(3) は同値である。

(1)　D' は捩じれを持たない。

(2)　$(D_X g)(Y, Z) = (D_Y g)(X, Z)$

(3)　$g(\gamma_X Y, Z) = g(Y, \gamma_X Z)$

補題 2.2 ([1],[2])　(D, g) が Codazzi 方程式をみたすとき，次が成り立つ。

(1)　(D', g) は Codazzi 方程式を満たす。

(2)　$2\nabla = D + D'$

(3)　$(D_X g)(Y, Z) = 2g(\gamma_X Y, Z)$

補題 2.3　Codazzi 構造 (D, g) をもつ Codazzi 多様体 M に対して，接続 D に関する曲率テンソルを R，接続 D' に関する曲率テンソルを R' とするとき，任意の M 上のベクトル場 X, Y, Z, W, U に対して次が成り立つ。

(1)　$R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z,\ R'(X, Y)Z = -R'(Y, X)Z$

(2)　$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0, \quad R'(X, Y)Z + R'(Y, Z)X + R'(Z, X)Y = 0$

(3)　$(D_X R)(Y, Z)W + (D_Y R)(Z, X)W + (D_Z R)(X, Y)W = 0,$
$(D'_X R')(Y, Z)W + (D'_Y R')(Z, X)W + (D'_Z R')(X, Y)W = 0$

(4)　$g(R(X, Y)Z, W) + g(Z, R'(X, Y)W) = 0$

(5)　$g\left((D_X R')(Y, Z)W + (D_Y R')(Z, X)W + (D_Z R')(X, Y)W, U\right)$
$+g(W, (D_X R')(Y, Z)U + (D_Y R')(Z, X)U + (D_Z R')(X, Y)U) = 0$

*原稿受付 平成 29 年 10 月 10 日
**佐世保工業高等専門学校　一般科目

証明　(1) は明らか。(2)，(3) はベクトル場の括弧積の性質に帰着する。(4) は D' の定義式の両辺を微分して曲率の定義式の形に変形することで示される。(5) は (4) を微分してベクトル場の括弧積と捩率が零であることから示される。 □

3. Codazzi 双曲率テンソルと Codazzi 双断面曲率

定義 3.1　M を Codazzi 構造 (D, g) をもつ Codazzi 多様体，接続 D に関する曲率テンソルを R，双対接続 D' に関する曲率テンソルを R' とするとき，任意の M 上のベクトル場 X, Y に対して

$$R^*(X,Y) = \frac{1}{2}\{R(X,Y) + R'(X,Y)\}$$

で定義されるテンソルを Codazzi 双曲率テンソル という。

補題 3.1　任意の M 上のベクトル場 X, Y, Z, W に対して次が成り立つ。

(1)　$R^*(X,Y)Z = -R^*(Y,X)Z$

(2)　$R^*(X,Y)Z + R^*(Y,Z)X + R^*(Z,X)Y = 0$

(3)　$g(R^*(X,Y)Z,W) = -g(R^*(X,Y)W,Z)$

(4)　$g(R^*(X,Y)Z,W) + g(R^*(Z,W)X,Y) = 0$

(5)　$(\gamma_X R^*)(Y,Z)W + (\gamma_Y R^*)(Z,X)W + (\gamma_Z R^*)(X,Y)W = 0,$

証明　(1)〜(3),(5) は補題 2.3 より示される。(4) は (1)〜(3) から示される（ [3] を参照)。 □

定義 3.2　ρ を M 上の点 p における接空間内の 2 次元平面とし，$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$ を ρ の正規直交基底とする。このとき，

$$K^*(\rho) = g(R^*(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1)$$

とおく。 これを Codazzi 双断面曲率という。

補題 3.1 の (4) より，$K^*(\rho)$ は正規直交基底の取り方によらないことが示される。

補題 3.2　X, Y を ρ の基底とするとき，

$$K^*(\rho) = \frac{g(R^*(X,Y)Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}$$

が成り立つ。

定理 3.1　M を次元が 3 以上の連結 Codazzi 多様体とする。このとき，点 p における Codazzi 双断面曲率 $K^*(\rho)$ が点 p によってのみ決まるならば，M 上で K^* は定数である。

証明　 点 p における接ベクトル X, Y, Z, W に対して

$$R_1(W,X,Y,Z) = g(W,X)g(Z,Y) - g(Z,X)g(Y,W)$$

で 4 次の共変テンソル R_1 を定義する。R^* は 補題 3.1 の (1)〜(3) の性質 を満たすので

$$R^* = kR_1$$

である。ここで k は M 上の関数である ([3])。
直接計算をすると

$$\begin{aligned}(D_U R^*)(W,Z,X,Y) &+ (D'_U R^*)(W,Z,X,Y) \\ &= g((D_U R^*)(X,Y)Z,W)) + g((D'_U R^*)(X,Y)Z,W))\end{aligned}$$

を得る。また，補題 2.2 の (2) より

$$(D_U + D'_U)(kR_1)(W,Z,X,Y) \quad = (D_U + D'_U)(k)R_1(W,Z,X,Y)$$

したがって

$$(D_U R^*)(X,Y)Z + (D'_U R^*)(X,Y)Z = (D_U + D'_U)(k)(g(Z,Y)X - g(Z,X)Y)$$

を得る。この式の U, X, Y を循環させて得られる 3 式を足すと，左辺は補題 2.3 の (3) より零になるので

$$0 = (Uk)(g(Z,Y)X - g(Z,X)Y) + (Xk)(g(Z,U)Y - g(Z,Y)U) + (Yk)(g(Z,X)U - g(Z,U)X)$$

ここで X は任意とし，Y, Z を X, Y, Z がおのおのが垂直で $g(Z,Z) = 1$ となるようにとり，$U = Z$ とすれば

$$(Xk)Y - (Yk)X = 0$$

を得る。X と Y は線形独立であるから $Xk = Yk = 0$ を得る。これは k が定数関数であることを示している。 □

系 3.1　Codazzi 双断面曲率が M 上で一定値 k であるとき

$$R^*(X,Y)Z = k\{g(Z,Y)X - g(Z,X)Y\}$$

と表せる。

定義 3.3　Codazzi 多様体 (M, g, D) に対し，(D', g) を (D, g) の双対 Codazzi 構造，γ, γ' をそれぞれ，D, D' の差テンソルとする。 このとき，2 つの (1,3) テンソル場を

$$H(X,Y)Z = (D\gamma)(Y,Z;X), \qquad H'(X,Y)Z = (D'\gamma')(Y,Z;X)$$

と定める。これをそれぞれの接続の Hesse 曲率テンソルという。さらに,

$$H^* = \frac{1}{2}(H + H')$$

で定まる (1,3) テンソルを Hesse 双曲率テンソルという。

補題 3.3　(M, g, D) を Codazzi 多様体，R^*，$\hat{R}$ をそれぞれ，Codazzi 双曲率テンソル，g の Levi-Civita 接続 ∇ に関する曲率テンソル，H^* を Hesse 双曲率テンソルとするとき，次が成り立つ。

$$\hat{R}(X,Y)Z = R^*(X,Y)Z + \frac{1}{2}\{H^*(X,Y)Z - H^*(Y,X)Z\}$$

証明　定義にしたがって計算をすると

$$H(X,Y)Z = -\left(R(X,Y)Z + D_{[X,Y]}Z\right) + D_X\nabla_Y Z - \nabla_Y D_X Z - \nabla_{D_X Y}Z + D_{D_X Y}Z$$

と表すことができる。ここで捩率が零であることを利用すると

$$\begin{aligned} H(X,Y)Z - H(Y,X)Z \quad &= \quad -2\left\{R(X,Y)Z + D_{[X,Y]}Z\right\} + D_X\nabla_Y Z - D_Y\nabla_X Z \\ &\qquad -\nabla_Y D_X Z + \nabla_X D_Y Z - \nabla_{[X,Y]}Z + D_{[X,Y]}Z \end{aligned}$$

を得る。同様に

$$\begin{aligned} H'(X,Y)Z - H'(Y,X)Z \quad &= \quad -2\left\{R'(X,Y)Z + D'_{[X,Y]}Z\right\} + D'_X\nabla_Y Z - D'_Y\nabla_X Z \\ &\qquad -\nabla_Y D'_X Z + \nabla_X D'_Y Z - \nabla_{[X,Y]}Z + D'_{[X,Y]}Z \end{aligned}$$

したがって

$$
\begin{aligned}
2\{H^*(X,Y)Z - H^*(Y,X)Z\} &= -2\{R'(X,Y)Z + R(X,Y)Z\} - 2\left(D_{[X,Y]}Z + D'_{[X,Y]}Z\right) \\
&\quad + (D_X + D'_X)\nabla_Y Z - (D_Y + D'_Y)\nabla_X Z - \nabla_Y (D_X + D'_X) Z \\
&\quad + \nabla_X (D_Y + D'_Y) Z - 2\nabla_{[X,Y]}Z + \left(D_{[X,Y]} + D'_{[X,Y]}\right) Z
\end{aligned}
$$

補題 2.2 の (2) より，

$$
\begin{aligned}
&= -2\{R'(X,Y)Z + R(X,Y)Z\} + 4\left(\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z\right) \\
&= -4R^*(X,Y)Z + 4\hat{R}(X,Y)Z
\end{aligned}
$$

□

補題 3.4　M を Coddazi 構造 (g,D) をもつ Codazzi 多様体，R^*，$\hat{R}$ をそれぞれ，Codazzi 双曲率テンソル，g の Levi-Civita 接続 ∇ に関する曲率テンソル，γ を D の差テンソルとする。このとき，次が成り立つ。

$$\hat{R}(X,Y) = R^*(X,Y) - [\gamma_X, \gamma_Y]$$

証明　$H(X,Y) = D_X\nabla_Y - \nabla_Y D_X - \nabla_{D_XY} + D_{D_XY} - D_X D_Y + D_Y D_X$ と表されることと D の捩率が零であることを使えば

$$H(X,Y) - H(Y,X) = -[\gamma_X, \gamma_Y] + \hat{R}(X,Y) - R(X,Y)$$

となることがわかる。同様に

$$H'(X,Y) - H'(Y,X) = -[\gamma'_X, \gamma'_Y] + \hat{R}(X,Y) - R'(X,Y)$$

と表される。補題 2.2 の (3) から $\gamma' = -\gamma$ が成り立つことに注意すれば

$$H^*(X,Y) - H^*(Y,X) = -[\gamma_X, \gamma_Y] + \hat{R}(X,Y) - R^*(X,Y)$$

である。これを補題 3.3 に代入すると与式を得る。　□

補題 3.3 と補題 3.4 より次が成り立つ。

系 3.2

$$H^*(X,Y) - H^*(Y,X) = -2[\gamma_X, \gamma_Y]$$

補題 3.4 と $\gamma_X Y = \gamma_Y X$ が成り立つことから次を得る。

補題 3.5　M を Codazzi 構造 (D,g) をもつ Codazzi 多様体，K^*，$\hat{K}$ をそれぞれ，Codazzi 双断面曲率テンソル，g の Levi-Civita 接続 ∇ に関する断面曲率テンソル，γ を D の差テンソルとする。このとき，次が成り立つ。

$$\hat{K}(X,Y) = K^*(X,Y) + \frac{g(\gamma_X Y, \gamma_X Y) - g(\gamma_X X, \gamma_Y Y)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}$$

4. 参考文献

[1] K.Nomizu and U.Simon,Notes on conjugate connections,Geometry and Topology of Submanifolds, IV ed.by F.Dillen and L.Verstraelen,World Scientific,Singapore,1992,152-172

[2] 志摩裕彦, ヘッセ幾何学，　裳華房，　2001

[3] S.Kobayashi and K.Nomizu,Foundations of Differential Geometry vol,I,II,John Wiley and Sons,New York,1963,1969